

# FAR DI CONTO – RICONOSCERE E SUPERARE LE DIFFICOLTA' IN MATEMATICA

ASSOCIAZIONE ITALIANA SINDROME X FRAGILE  
SINDROME X FRAGILE: MODELLI E METODI DI LAVORO EFFICACI

*Annamaria Porru*  
*annamaria.porru@unipd.it*



Cosa vedete in  
questa immagine?

# INTELLIGENZA NUMERICA

La capacità di manipolazione di “intelligere” le quantità, ovvero manipolare, capire, ragionare, attraverso il complesso sistema cognitivo dei numeri e delle quantità.



NATURA

Capacità innate

“ La capacità di classificare il mondo in termini di numerosità, [...], non abbiamo bisogno di apprenderla, bensì, nasciamo già sapendo come fare: fa parte del nostro cervello matematico”

CULTURA

Contare

Acquisizioni  
matematiche

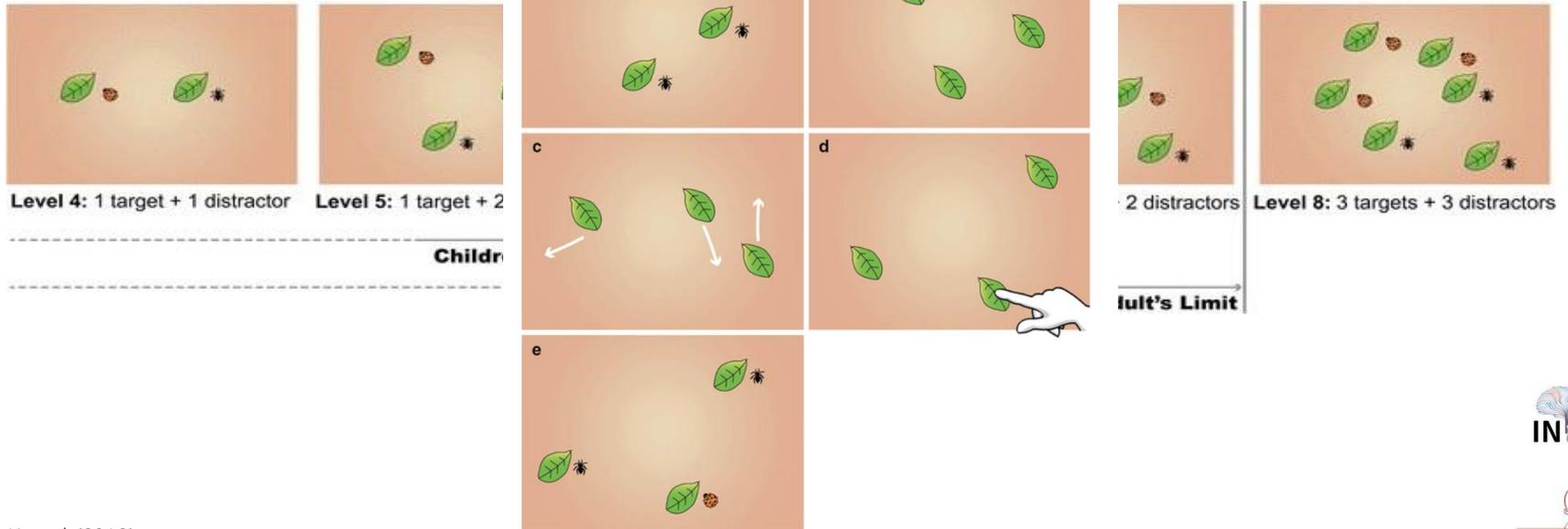
BUTTERWORTH, 1999

La strutturazione della conoscenza numerica si basa su due sistemi pre- verbali (core systems) per il processamento di informazione numerica (Piazza, 2010).

- 1. Object Tracking System (OTS)** - (Sistema di Tracciamento dell'Oggetto)
- 2. Approximate Number System (ANS)** - (Sistema Approssimato del Numero)

# Object Tracking System (OTS)

Meccanismo che permette di tracciare le caratteristiche spazio- temporali degli oggetti (Piazza, 2010)



## Subitizing

Capacità di enumerare in modo rapido ed accurato piccole quantità di oggetti (< 4- 6).

*Quanti pallini ci sono?*



## Approximate Number System

- Sistema per la rappresentazione di quantità numeriche non-simboliche.
- Capacità superiore ai 3-4 elementi.
- *Ratio dependent effect* → più il rapporto numerico tra due insiemi si avvicina a 1 e più è difficile dire quale insieme sia più numeroso.

# ABILITÀ PROTO-ARITMETICHE - WYNN, 1992.

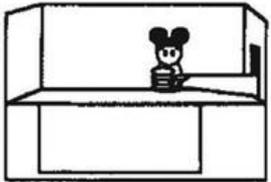


Slater et al., 2010

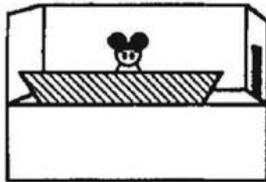
## ASPETTATIVE ARITMETICHE

### Sequence of events $1+1 = 1$ or $2$

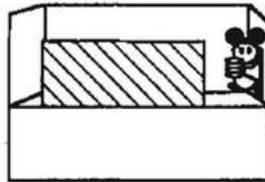
1. Object placed in case



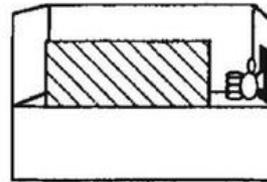
2. Screen comes up



3. Second object added

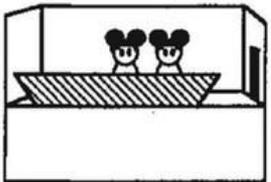


4. Hand leaves empty

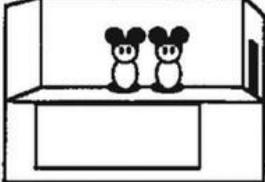


Then either : possible outcome

5. Screen drops ...

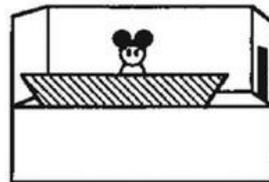


revealing 2 objects

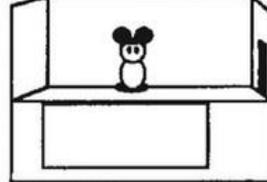


or : impossible outcome

5. Screen drops ...

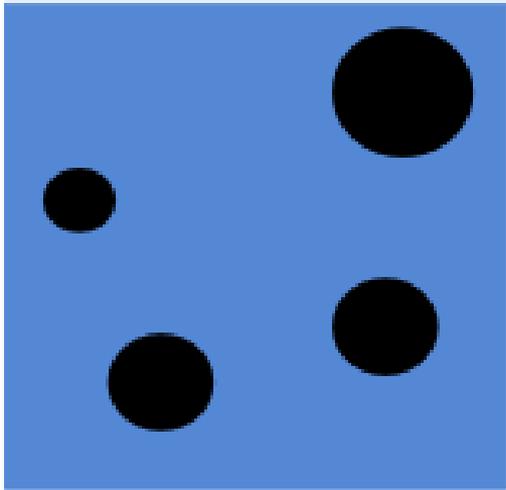


revealing 1 object



Già a pochi mesi di vita, i bambini non solo discriminano due insiemi in base al numero di oggetti contenuti, ma possiedono anche delle aspettative aritmetiche basate sul concetto di numerosità (Wynn, 1992).

# DAL PROCESSAMENTO ANALOGICO-PREVERBALE A QUELLO LINGUISTICO-SIMBOLICO





Età (anni; mesi)	Tappe
0;0	Discrimina in base a piccole numerosità (Antell e Keating, 1983)
0;4	Somma e sottrae uno (Wynn, 1992)
0;11	Distingue sequenze di numerosità crescenti e decrescenti (Brannon, 2002)
2;0	Inizia ad apprendere la sequenza di parole-conta (Fuson, 1992); è in grado di stabilire la corrispondenza uno a uno nei compiti di ripartizione (Potter e Levy, 1968)
2;6	Riconosce che le parole-numero significano «maggiore di uno» («arraffoni»; Wynn, 1990)
3;0	Conta piccoli numeri di oggetti (Wynn, 1990)
3;6	Somma e sottrae uno con oggetti e parole-numero (Starkey e Gelman, 1982); è in grado di usare il principio cardinale per stabilire la numerosità di un insieme (Gelman e Gallistel, 1978)
4;0	Usa le dita per aiutarsi nell'addizione (Fuson e Kwon, 1992)
5;0	È in grado di aggiungere piccoli numeri senza essere capace di contare la somma (Starkey e Gelman, 1982)
5;6	Comprende la proprietà commutativa dell'addizione e conta in avanti a partire dall'addendo maggiore (Carpenter e Moser, 1982); conta correttamente fino a 40 (Fuson, 1988)
6;0	«Conserva» il numero (Piaget, 1952)
6;6	Comprende la complementarità di addizione e sottrazione (Bryant et al., 1999); conta correttamente fino a 80 (Fuson, 1988)
7;0	Recupera alcuni fatti aritmetici dalla memoria

# CINQUE PRINCIPI DEL CONTEGGIO (GELMAN E GALLISTEL, 1978)

## Corrispondenza biunivoca

- Il bambino deve far corrispondere ogni elemento dell'insieme che sta contando a una e una sola parola-numero. A ogni elemento dell'insieme contato deve corrispondere una sola parola-numero (o etichetta) e viceversa.

## Ordine stabile

- Il bambino deve conoscere le parole-numero ed essere in grado di ripeterle seguendo l'ordine esatto. La lista che si usa deve contenere le etichette dei numeri sempre nello stesso ordine

## Cardinalità

- Il bambino deve capire che la parola-numero associata all'ultimo elemento contato in un insieme corrisponde alla cardinalità dell'insieme, cioè alla sua numerosità. L'etichetta finale ha un significato speciale: la numerosità dell'insieme.

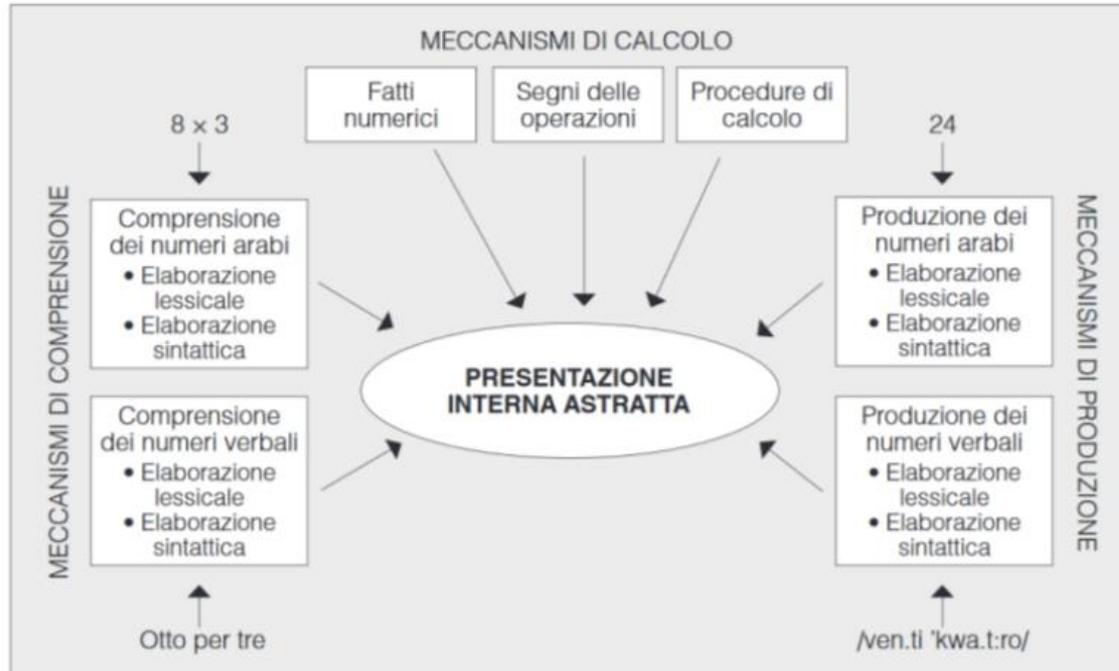
## Astrazione

- Il bambino deve capire che qualunque cosa può essere contata indipendentemente dalle caratteristiche degli elementi dell'insieme. Le cose che conto possono anche essere pensieri astratti (non necessariamente cose concrete).

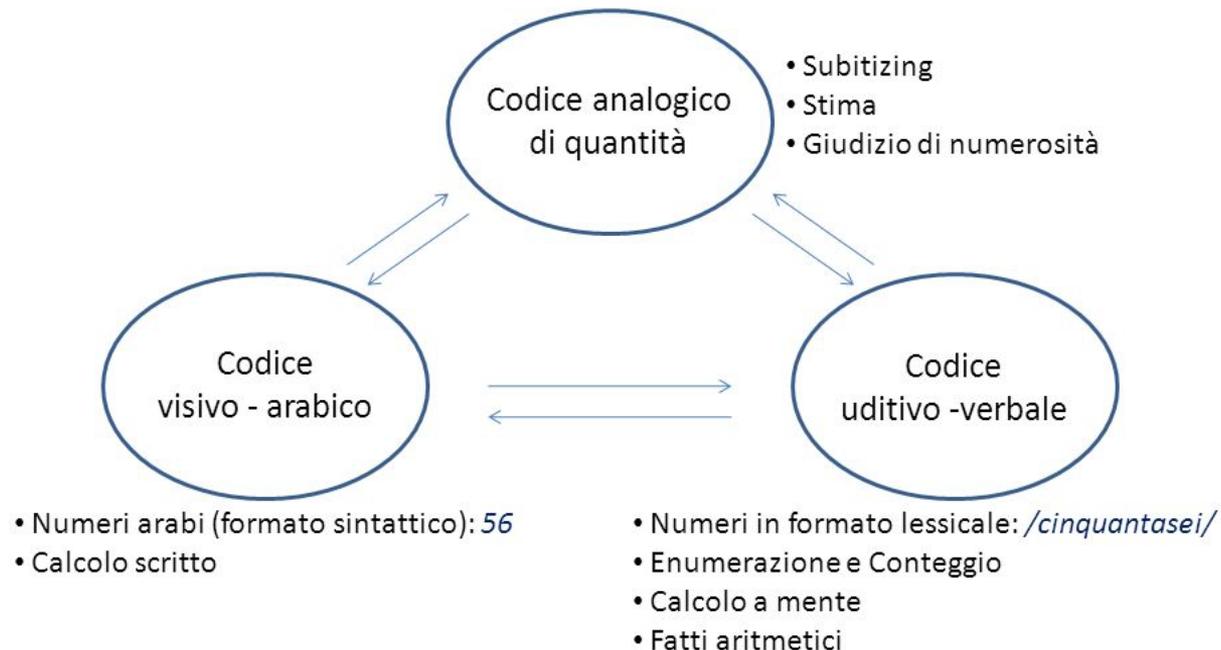
## Irrelevanza dell'ordine

- Il bambino deve comprendere che l'ordine in cui sono contati gli elementi non ne modifica la cardinalità. L'ordine del conteggio è irrilevante, così l'ordine nel quale gli oggetti sono etichettati è irrilevante

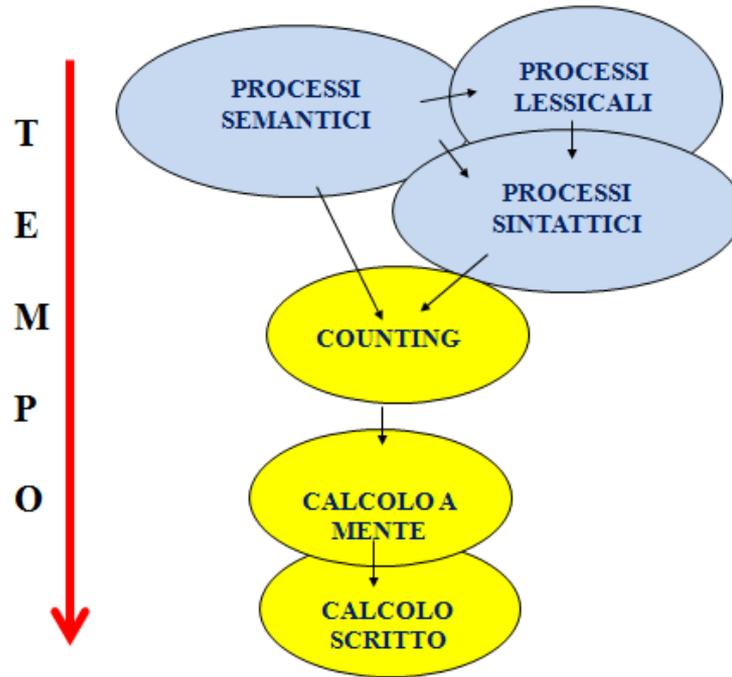
# MODELLO MODULARE CALCOLO (MCCLOSKEY, BASILI E CARAMAZZA, 1985)



# MODELLO DEL TRIPLO CODICE CALCOLO (DEHAENE, COHEN, 1995)



# PROCESSI DI APPRENDIMENTO ABILITÀ DI CALCOLO:

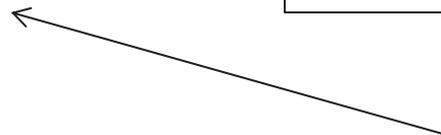


(Lucangeli, Poli, Molin, 2009)

# I TRE SISTEMI FUNZIONANO IN BASE A :

*Meccanismi Lessicali*  
(regolano il nome del numero)  
selezionano adeguatamente i nomi delle cifre  
(1 - 11)

*Meccanismi Semantici*  
(regolano la comprensione della quantità)  
astrazione dal codice specifico  
(3 = ★ ★ ★ )

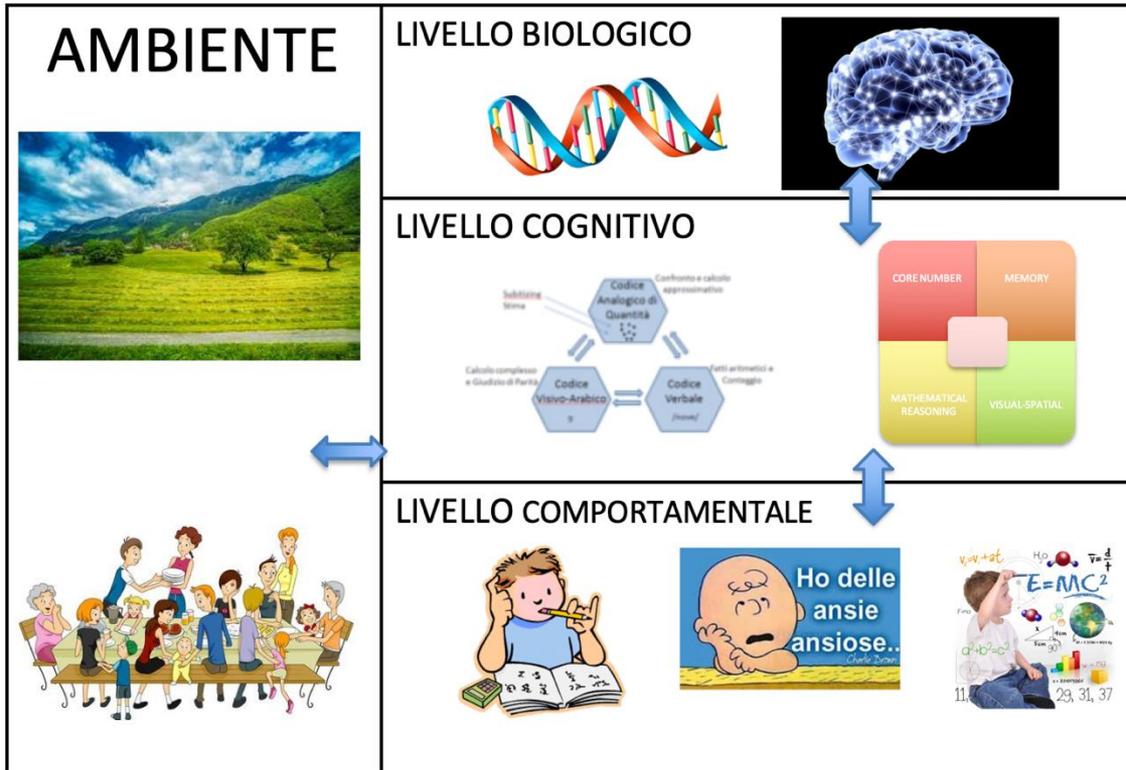


*Meccanismi Sintattici*  
(Grammatica Interna = Valore Posizionale delle Cifre)  
attivano il corretto ordine di grandezza di ogni cifra

da	u
1	3
3	1

la posizione  
cambia nome  
e semante

# L'INTELLIGENZA NUMERICA



PROFILI CON  
SINDROME  
X-FRAGILE

# QUALI DIFFICOLTÀ NEGLI STUDENTI CON SINDROME DEL X-FRAGILE:

Table 2  
Composite scores according to participant groups<sup>a</sup>: means (ranges)

Composite type	Group					Math learning disability ( $n = 23$ )
	Normative ( $n = 226$ )	Turner syndrome		Fragile X		
		All participants ( $n = 28$ )	Kindergarteners only ( $n = 18$ )	All participants ( $n = 21$ )	Kindergarteners only ( $n = 14$ )	
Rote counting (out of 6)	4.51 (0–6)	4.64 (0–6)	4.20 (0–6)	5.06 (3–6)	5.09 (4–6)	2.86 (0–6)
Written representation (out of 4)	3.28 (0–4)	3.38 (0–4)	3.06 (0–4)	3.79 (3–4)	3.75 (3–4)	2.00 (0–4)
Counting rules (out of 2)	1.85 (0–2)	1.82 (0–2)	1.78 (0–2)	1.52 (0–2)	1.43 (0–2)	1.43 (0–2)
Enumeration (out of 7)	6.26 (2–7)	5.92 (2–7)	5.63 (2–7)	5.32 (3–7)	5.50 (3–7)	5.20 (2–7)
Application composite (out of 2)	—	.93 (0–2)	.78 (0–2)	.53 (0–2)	.43 (0–2)	.09 (0–1)

*Note.* Dash indicates data for application composite was not available from all participants in the normative sample.

<sup>a</sup> The stated  $n$  reflects the largest sample size per group; sample size varies for composite scores. Ranges for group sample sizes are as follows: normative (221–226); Turner syndrome, all participants (25–28); Turner syndrome, kindergarteners only (15–18); fragile X, all participants (17–21); fragile X, kindergarteners only (11–14); math learning disability (20–23).

Murphy, M. M., Mazzocco, M. M., Gerner, G., & Henry, A. E. (2006). Mathematics learning disability in girls with Turner syndrome or fragile X syndrome. *Brain and cognition*, 61(2), 195-210.

# DIFFERENZE FRA PROFILI:

TABLE II. Standard Scores on the Wide Range Achievement Test-3\*

	Mean (SD)	Median (Centile)	( <i>P</i> value)**	Range
Women with the premutation (n = 39)				
Reading	97.3 (14.5)	100 (50th)	0.97	56–116
Spelling	97.8 (14.2)	101 (53rd)	0.84	59–115
Arithmetic	91.7 (12.5)	93 (32nd)	0.0001	64–117
Women with the full mutation (n = 8)				
Reading	83.1 (16.3)	88 (21st)	<0.02	56–100
Spelling	84.4 (17.4)	90.5 (26th)	0.02 < <i>P</i> < 0.05	60–106
Arithmetic	68.4 (17.5)	66 (1st)	<0.01	45–99

SD, standard deviation.

\*One hundred is the median of the standardized norm and represents the 50th centile. Ninety represents the 25th centile; 110 represents the 75th centile; 70 represents the 2nd centile.

\*\*Significance probability (*P*-value) associated with the Wilcoxon Signed Rank procedure to assess whether the median score of the specified group of women differed significantly from the median of the normed standard score on the WRAT3 [Conover, 1999].

# DIFFERENZE FRA PROFILI:

PARTICIPANT	AGE	DIAGNOSIS	IQ	VABS COMPOSITE
PROBAND 1	10	FM (AR 30%)	55	66
PROBAND 2	11	FM (AR 70%)	110	104

**Table 4.** Numerical and arithmetical tasks. Performance is reported as raw scores and percentages for computerized tasks, and as z-scores for standardized tasks.

**NUMERICAL SKILLS**



**1. Size seriation**  
Arranging objects from the smallest to the biggest in size for 6 trials and from the biggest to the smallest for another 6 trials



**5. Comparison**  
Comparing two groups of dots and tapping the bigger one (16 trials, numerosity of groups from 2 to 64 dots)



**2. Counting**  
Counting the number of objects displayed (20 trials, respectively from 1 to 10 objects)



**6. Cardinality-verbal** give me a number  
Listening to a vocal command and inserting the correct number of apples in the basket (from 1 apple to 7)



**3. Nonsymbolic ordering**  
Arranging a series of five quantities expressed by a group of dots (6 trials for ascending ordering and 6 trials for descending ordering, numbers from 1 to 12)



**7. Cardinality-Arabic** give me a number  
Inserting the correct quantity of apples indicated by the number on the basket (from 1 apple to 7)



**4. Symbolic Ordering**  
Arranging a series of five numbers, expressed by arabic symbols (6 trials for ascending ordering and 6 trials for descending ordering, numbers from 1 to 10)



**8. Proto-arithmetical skills**  
Performing non-symbolic simple sums (3 trials x 4 blocks)

Process Assessed	Tasks	Accuracy	
		Proband 1	Proband 2
Number comprehension	Compare sets of dots	(0/18) n/v	(17/18) 94.44%
	Ordering by Size-Ascending	(0/30) n/v	(24/30) 80%
	Ordering by Size-Descending	(0/30) n/v	(24/30) 80%
	Ordering Sets-Ascending	(24/30) 80%	(30/30) 100%
	Ordering Sets-Descending	(0/30) n/v	(30/30) 100%
	Ordering Numerals-Ascending	(22/30) 73.33%	(30/30) 100%
	Ordering Numerals-Descending	(0/30) n/v	(30/30) 100%
	Counting-Dice-Configuration	n/v	100%
Counting principles	Counting-No-Configuration	n/v	100%
	Enumeration (*)	n/v	Z score = 0.7
	Give-me a Number-Visual-Arabic Format	(7-CPK) 100%	(7-CPK) 100%
	Verbal Format	(1-CPK) 14.29%	(6-CPK) 42.86%
Arithmetic skills	Non-symbolic Addition Task	(0/12) n/v	(11/12) 91.66%
	Mental Multiplication (*)	n/v	(17/18) Z score = 0.57
	Mental Calculations (*)	n/v	(16/18) Z score = 1.02

Note: the symbol (\*) refers to standardized tasks from the BDE-2 [34]; CPK = Cardinal Principle Knowers. n/v = not valuable.

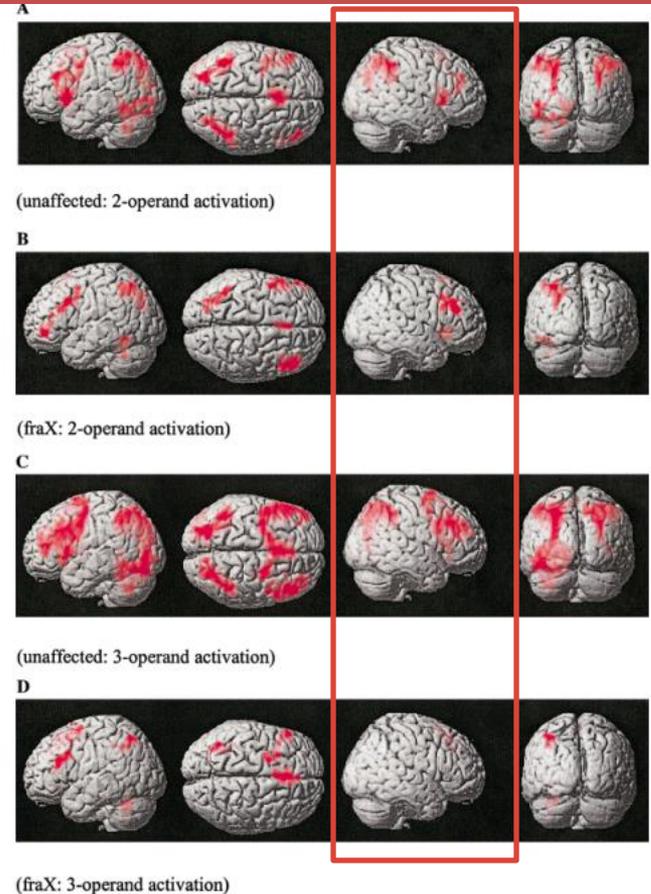
# DIFFERENZE NEURALI:

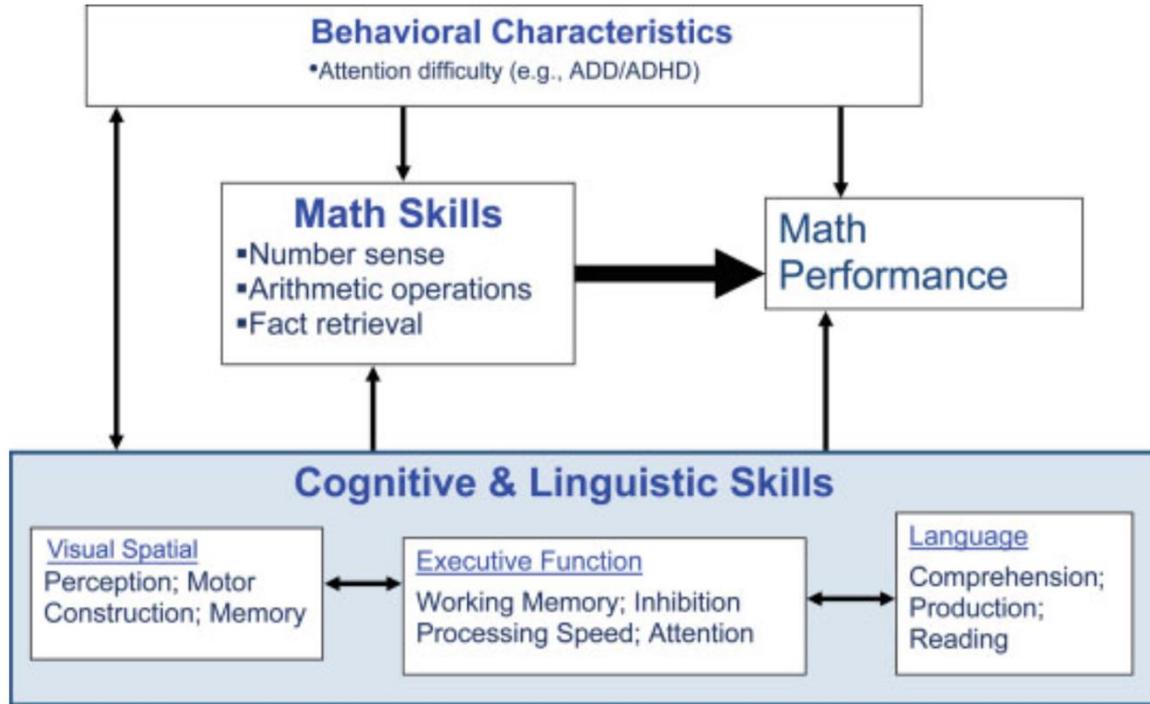
16 females with fragile-X Syndrome;  
16 female age-matched Controls  
(Age range: 10.12–22.73 years; mean: 16.17 years)

Subjects viewed arithmetic equations with

two ( $1 + 3 = 4$ ) or  
three ( $2 + 3 - 1 = 5$ ) operands

Fragile X Syndrome group impaired on complex arithmetic,  
**less brain activation**, especially with increased difficulty,  
activation correlated with FMR1 protein expression.





Murphy, M. M. (2009). A review of mathematical learning disabilities in children with fragile X syndrome. *Developmental disabilities research reviews*, 15(1), 21-27.

**Table 1. Summary of Implicated Strengths and Challenges in Mathematics and Related Skills in Female and Male Individuals with Fragile X Syndrome<sup>a</sup>**

	Females		Males	
	Strength <sup>b</sup>	Challenge <sup>b</sup>	Strength <sup>b</sup>	Challenge <sup>b</sup>
Mathematics skills				
Number sense	Reading/writing numbers <sup>c</sup> Rote counting <sup>c</sup> : Forward by ones Backward by ones Forward by tens Next number in series	Visual/verbal magnitude judgments Mental number line judgments Counting 8 pictured items Applied counting: 1-to-1 correspondence <sup>d</sup> Number constancy Identifying Nth in set		One-to-one correspondence when counting
Arithmetic operations		Adding sets less than 10		Early math skills as assessed by WJ-R, Applied Problems subtest
Related skills				
Executive function				
Working memory		Performance declines as working memory demands increase  Limited changes in brain activation in response to increasing task difficulty	Memory for meaningful information presented in context	Sequential processing  Inhibition, selective and sustained attention
Visual spatial		Visual perceptual ability; difficulty recalling object location in array		Visual spatial skills, visual-motor coordination

WJ-R = Woodcock Johnson-Revised.

<sup>a</sup>Table highlights areas of known strength and challenge as well as areas where evidence regarding mathematics and related skills is lacking.

<sup>b</sup>Based on comparisons to children with no known syndrome.

<sup>c</sup>Performance exceeds that of children with MLD.

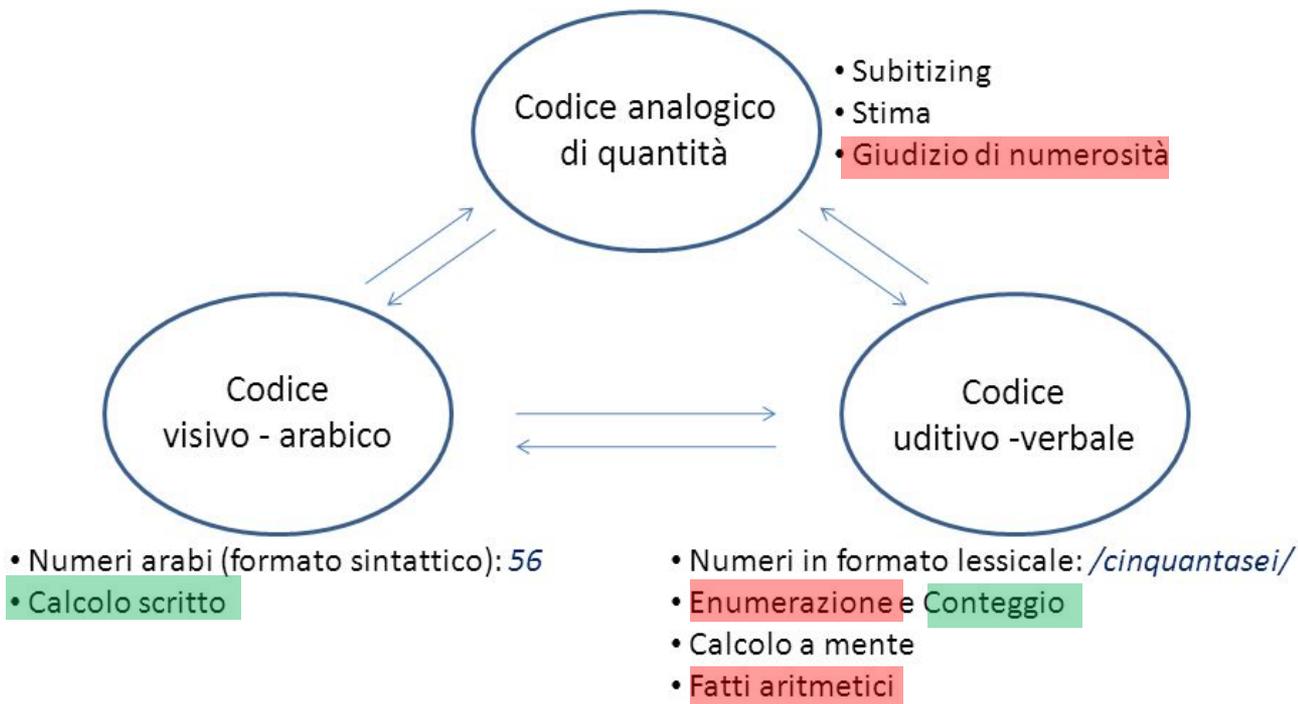
<sup>d</sup>Indicates area of challenge relative to children with MLD.

Murphy, M. M. (2009). A review of mathematical learning disabilities in children with fragile X syndrome. *Developmental disabilities research reviews*, 15(1), 21-27.

Theme	Key Manifestations	Supporting Evidence	Clinical Implications
Core Mathematical Processing Difficulties	Deficits in quantitative reasoning, arithmetic, short-term memory, visual-spatial processing	Freund and Reiss, 1991; Dykens et al., 1987; Rivera et al., 2002	Need for targeted assessment and intervention addressing both arithmetic and underlying cognitive processes
Rote vs. Conceptual Skills Disparity	Preservation of rote skills (counting, naming decimals); impaired conceptual understanding; masking effect	Murphy and Mazzocco, 2008b; Murphy et al., 2006	Standard tests may underestimate deficits; importance of conceptual-focused assessment
Gender-Specific Manifestations	Females: arithmetic/quantitative deficits, short-term memory; Males: more severe, spatial/visual-motor deficits	Freund and Reiss, 1991; Murphy and Mazzocco, 2008a; Lachiewicz et al., 2006	Gender-specific assessment and intervention strategies may be warranted

## Quali i punti di forza?

## Quali le difficoltà?



PERCHÉ È  
IMPORTANTE LA  
MATEMATICA?



Muoverci



Usare dispositivi digitali



Comunicare



Cucinare



Gestire le spese



Cosa ci serve per farlo?





# GLI STRUMENTI PER LA VALUTAZIONE

# QUALI STRUMENTI ABBIAMO?

## PRERERQUISITI

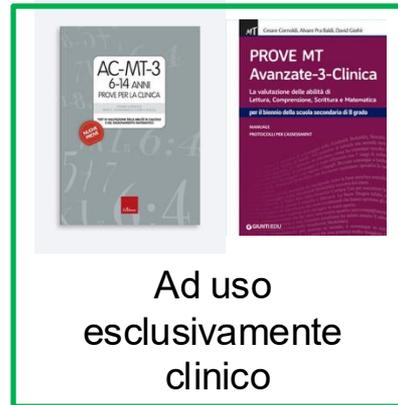
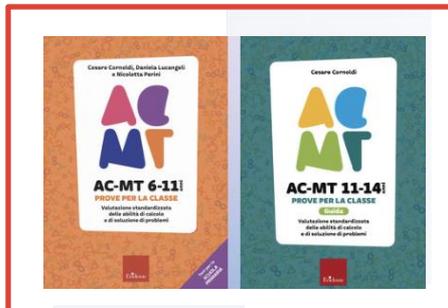
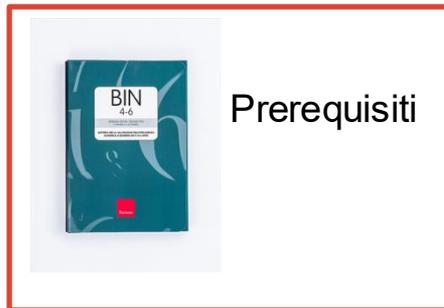
- Bin 4-6

## I LIVELLO

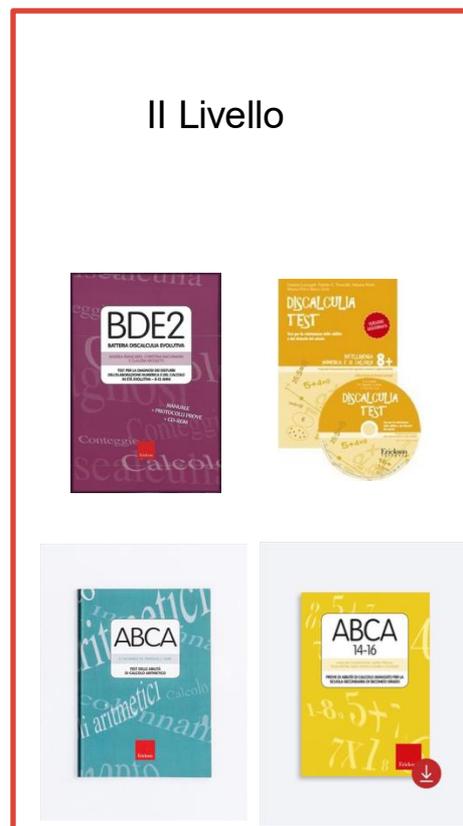
- Batteria AC-MT-3 (6-14 anni) Prove per la clinica (per la primaria e secondaria di primo grado)
- Batteria AC-MT 11-14 (per la scuola secondaria I grado) – versione per clinici e insegnanti
- Prove MT Avanzate 3 clinica (per il biennio della scuola secondaria di II grado)
- Prove MT Avanzate 3 clinica (somministrazione delle prove del biennio della scuola secondaria di II grado ma confronto con i dati normativi del triennio della scuola secondaria di II grado)

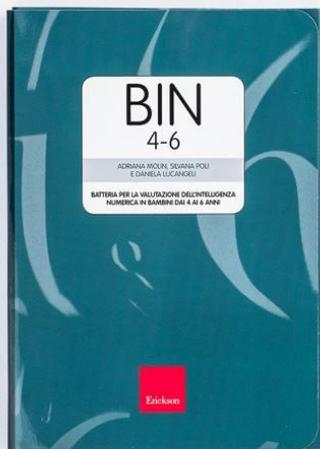
## II LIVELLO

- Batteria BDE2
- Batteria ABCA (per la scuola primaria)
- Discalculia Test (per la scuola primaria e secondaria di I grado)
- Batteria ABCA 14-16 (per la scuola secondaria di I grado)



## I Livello





BIN 4-6

# Sinossi della Batteria BIN 4-6

- Prove n. 11 + protocollo per la raccolta dati + profilo individuale
- Età 4-6 anni
- Modalità di somministrazione: individuale, orale
- Tempo di somministrazione: 20 minuti



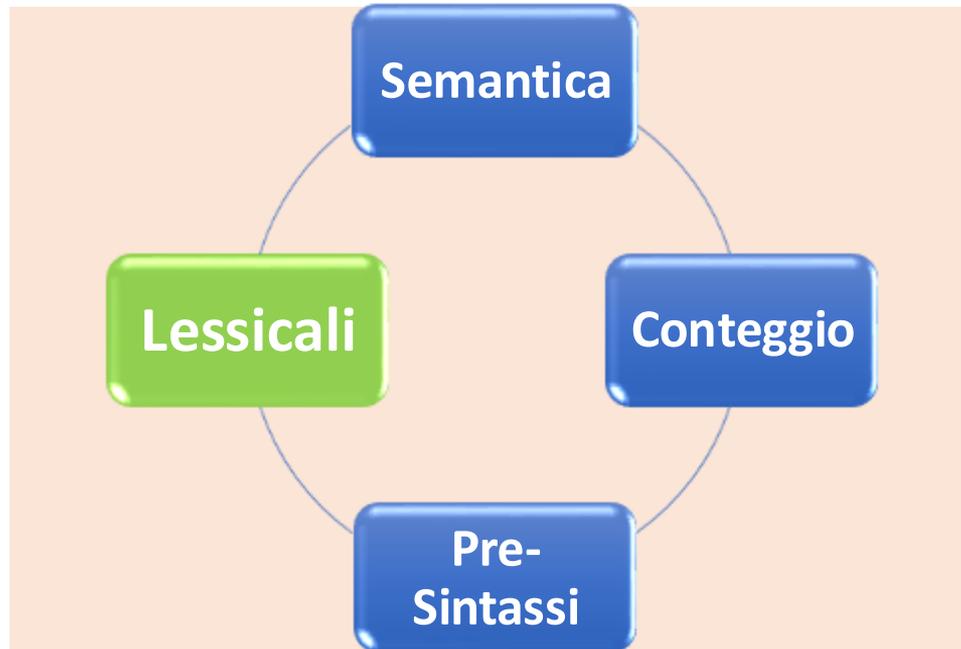


# Aree indagate dalle prove

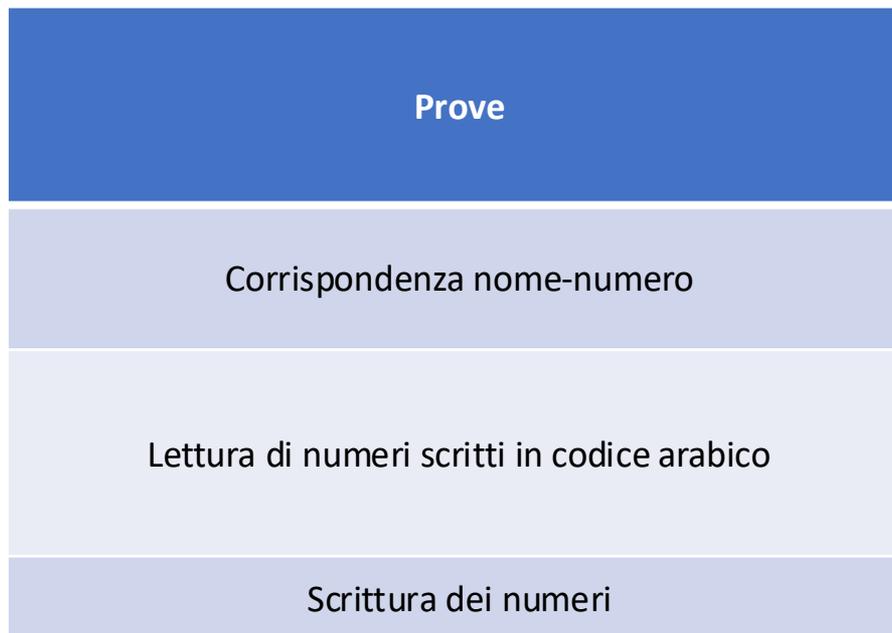
1. **Processi semantici** o della comprensione quantitativa
2. **Processi di conteggio**, le abilità di conta
3. **Processi lessicali**, la denominazione del numero
4. **Processi pre-sintattici**, ovvero i processi legati alla struttura del sistema numerico.



# Processi



# Struttura della BIN 4-6: Processi Lessicali



## Corrispondenza nome-numero

Mostrare il primo cartoncino e quindi fare la domanda relativa al numero target (numero in grassetto e sottolineato); proseguire poi seguendo la sequenza indicata più sotto.

«Conosci il numero 2? Qual è tra questi numeri?»

ITEM A **5** 2 1    ITEM B 4 **1** 2    ITEM C 6 8 **5**    ITEM D 2 **3** 6    ITEM E **4** 3 6

ITEM F **8** 5 9    ITEM G 5 9 **6**    ITEM H 8 **9** 6    ITEM I **7** 4 8

Segnare le risposte corrette.

Numero risposte corrette \_\_\_\_\_ (massimo 9)



5

2

1

# Lettura di numeri scritti in codice arabico



Ritagliare i numeri e mostrarli, uno alla volta, nella seguente sequenza:

2 4 3 7 1 9 5 8 6

«Guarda questo numero. Mi sai dire che numero è?»

Segnare il tipo di errore (ad esempio, lettere per numeri, un numero al posto di un altro, ecc.) e le non risposte.

---

---

Numero risposte corrette \_\_\_\_\_ (massimo 9)

2	4	3
7	1	9
5	8	6

© 2007, A. Molin, S. Poli e D. Lucangeli, BIN 4-6, Trento, Erickson

# Scrittura sei numeri

«Sal come si scrivono i numeri?»  Sì  No

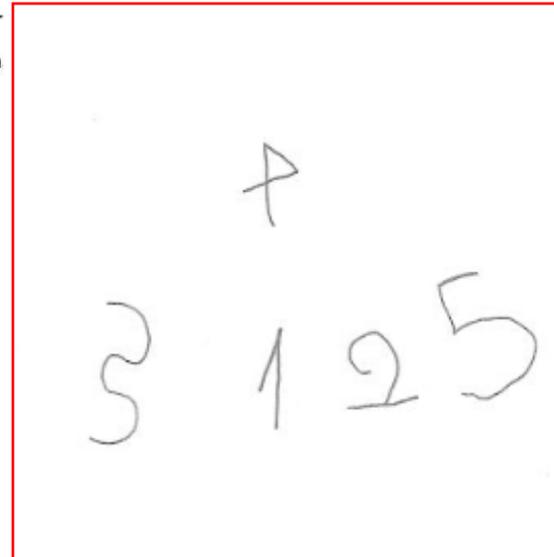
[Si prenda un foglio bianco] «Scrivi il numero 3; scrivi anche: 1, 4, 2, 5.»

3 1 4 2 5

Indicare il tipo di errore (ad esempio, scrivi 4 al posto di 2).

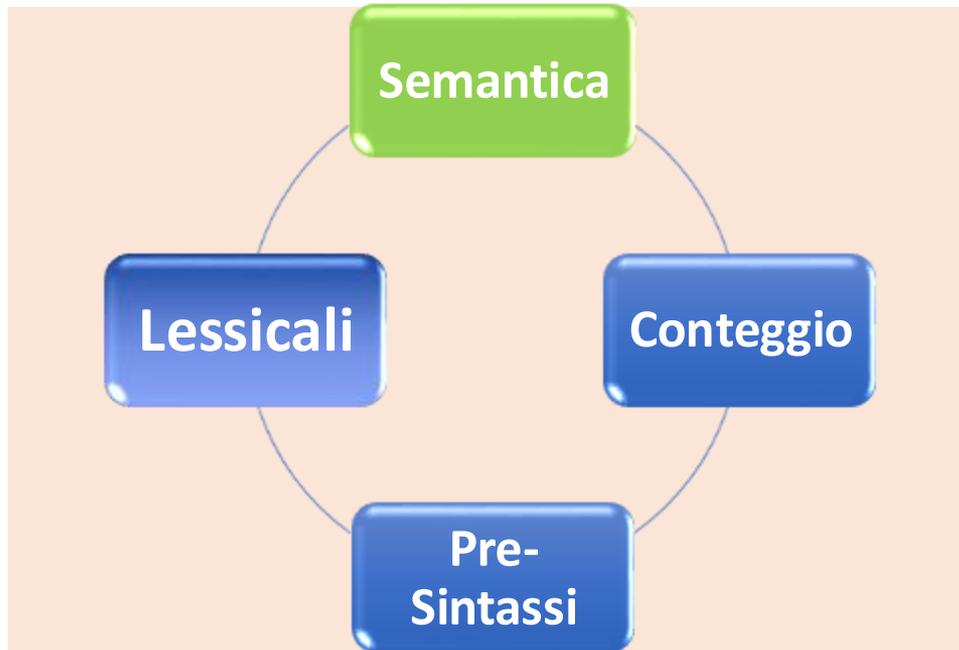
Annotazioni \_\_\_\_\_

Numero risposte corrette \_\_\_\_\_ (massimo 5)

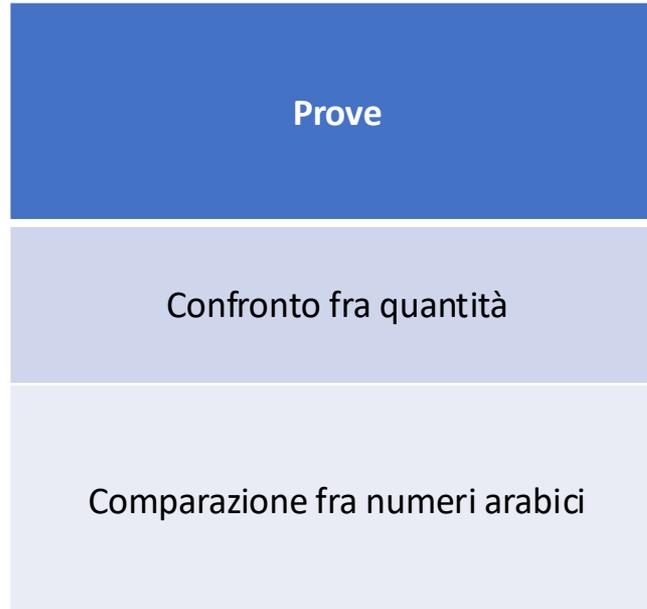




# Processi



# Struttura della BIN 4-6: Processi Semantici



# Confronto fra quantità

Far osservare i due rettangoli al bambino e dire:

«Guarda con attenzione i pallini disegnati nei rettangoli e indica dove ci sono più pallini».

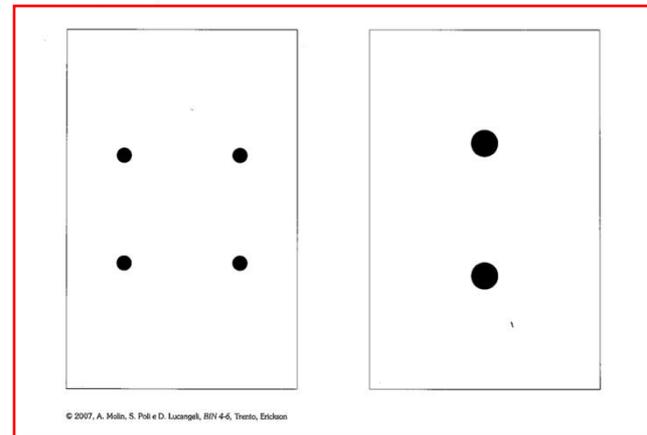
Proseguire allo stesso modo fino alla fine.

ITEM A 4 2    ITEM B 1 2    ITEM C 5 8    ITEM D 8 3    ITEM E 7 6

ITEM F 2 5    ITEM G 4 9    ITEM H 8 5    ITEM I 9 6    ITEM L 9 8

Annotazioni per il somministratore: segnare le risposte del bambino

Numero risposte corrette \_\_\_\_ (massimo 10)



# Comparazione fra numeri arabici



Mostrare i cartoncini uno alla volta a cominciare dall'item A (e proseguire poi con gli altri) e dire:

«Rifletti: 2 è più di 4?» \_\_\_\_\_ «Perché?» \_\_\_\_\_

Per gli altri item dire: «Mi sai dire tra questi numeri, quale è di più?».

Mostrare i cartoncini in questa sequenza e segnare le risposte del bambino:

ITEM A 2 4    ITEM B 7 2    ITEM C 8 3    ITEM D 1 2    ITEM E 7 8    ITEM F 4 5

ITEM G 6 3    ITEM H 6 7    ITEM I 5 1    ITEM L 3 9    ITEM M 4 1

Attribuire un punto per ogni risposta corretta.

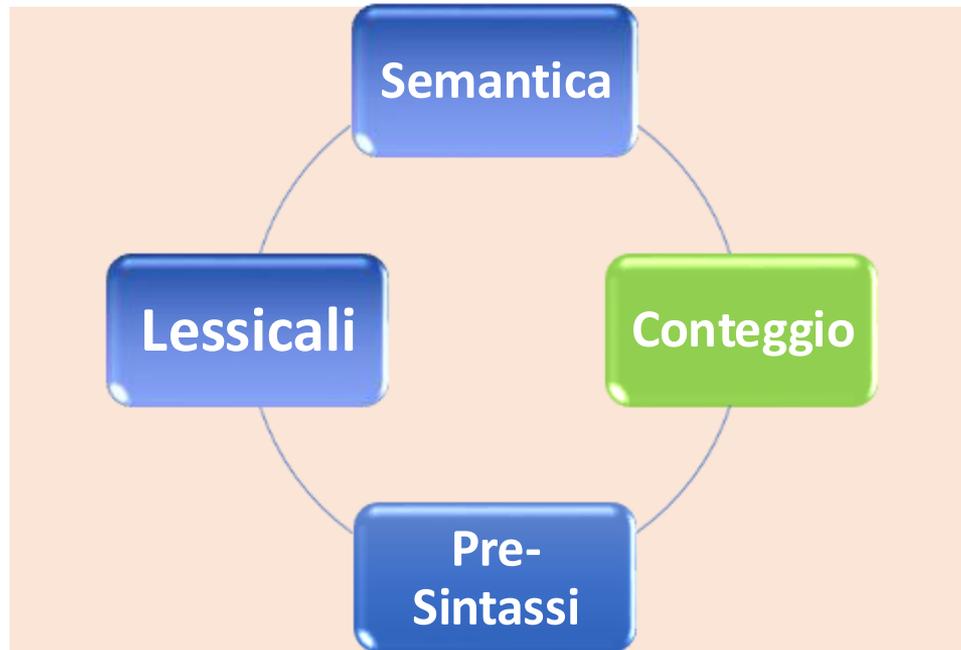
Numero risposte corrette \_\_\_\_ (massimo 11)

2

4



# Processi



# Struttura della BIN 4-6: Processi Conteggio



Prove
Enumerazione in avanti
Enumerazione indietro
Seriazione di numeri arabi
Completamento di seriazioni

# Enumerazione in avanti e indietro



«E i numeri, li sai dire? Sai contare?» \_\_\_\_\_

«Prova a contare a voce alta, proprio come conti tu.»

Barrare gli errori indicando se ci sono omissioni, intrusioni, regressioni.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Punteggio: Sottrarre da 20 il totale degli errori (omissioni, intrusioni e regressioni)

Numero risposte corrette \_\_\_\_\_ (massimo 20)

«E sai dire i numeri all'indietro? Ad esempio, 10, 9, 8...»

«Da che numero vuoi iniziare?»

Annotare la sequenza prodotta dal bambino indicando se ci sono omissioni, imprecisioni, regressioni: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Punteggio: contare un punto per ciascun numero nominato nella giusta sequenza all'indietro. Nel caso di incertezza nell'attribuzione del punteggio, far ripetere la sequenza.

Numero risposte corrette \_\_\_\_\_ (massimo 10)

Punteggio prova enumerazione \_\_\_\_\_ (massimo 30)

# Seriazione di numeri arabi



Chiedere al bambino di completare le sequenze pronunciando il nome dei numeri mancanti (posto del trattino). Se il bambino avesse difficoltà a verbalizzare i numeri, si possono far scrivere, se è in grado di farlo. Mostrare una sequenza alla volta.

«Guarda questi numeri e prova a dire (o scrivere) il numero che manca.»

1 \_ 3 4      1 2 \_ 4      \_ 2 3 4  
1 2 3 \_      1 \_ \_ 4.

Attribuire un punto per ogni completamento corretto.

Punteggio totale \_\_\_\_ (massimo 5)

1    \_    3    4

1    2    \_    4

\_    2    3    4

1    2    3    \_

1    \_    \_    4

# Completamento di seriazioni

Disporre in disordine i numeri 1, 2, 3, 4, 5, opportunamente ritagliati. Dare al bambino la consegna e domandargli da che numero dovrà iniziare allo scopo di assicurarsi che abbia compreso il compito.

«Metti in ordine i numeri dal più piccolo al più grande.»

Attribuire 1 punto per ogni numero correttamente seriato.

Punteggio \_\_\_\_\_ (massimo 5)

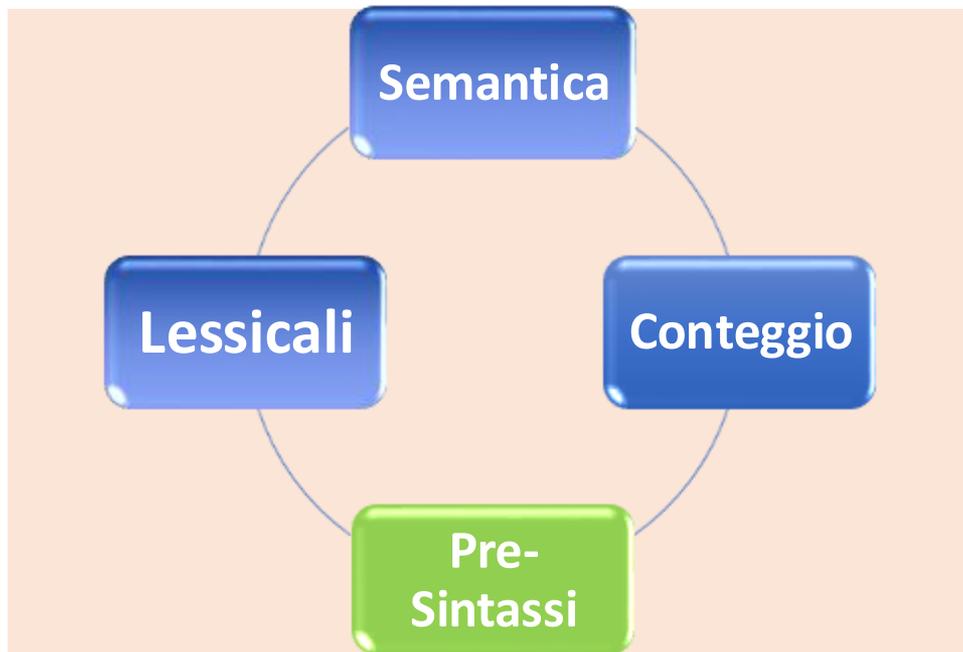


1 3 5

2 4

© 2007, A. Molit, S. Pol e D. Luzzogel, BIN 4-6, Trento, Erickson

# Processi



# Struttura della BIN 4-6: Processi Pre-Sintassi

Prove
Corrispondenza fra codice arabo e quantità
Uno - Tanti
Ordine di grandezza



# Corrispondenza fra codice arabico e quantità



Presentare al bambino i cartoncini e far scegliere al bambino la quantità target.

«Conosci questo numero [indicare il numero scritto in alto]? Indica, tra queste, la quantità di pallini corrispondente al numero che vedi scritto.»

ITEM A 2 1 4    ITEM B 4 3 1    ITEM C 7 4 6    ITEM D 3 2 5    ITEM E 6 4 3  
ITEM F 4 8 5    ITEM G 6 8 9    ITEM H 6 7 5    ITEM I 6 4 9

Annotazioni \_\_\_\_\_

Segnare le risposte corrette.

Numero risposte corrette \_\_\_\_ (massimo 9)

1

© 2007, A. Molè, S. Pini e D. Lucangeli, BIN 4-6, Treves, Erickson

# Uno - Tanti

Chiedere al bambino di completare le frasi (oralmente):

	<b>Risposte attese</b>
1. Una classe è formata da tanti _____	(bambini, accettare anche banchi...)
2. Una mano è formata da tante _____	(dita)
3. Con tante perle si fa una _____	(collana o sinonimo)
4. Tanti alberi formano un _____	(bosco, accettare anche foresta, pineta...)
5. In un astuccio ci sono tanti _____	(pennarelli, colori, penne...)
6. Tante pagine formano un _____	(libro, quaderno, giornale.....)

Numero risposte corrette \_\_\_\_ (massimo 6)



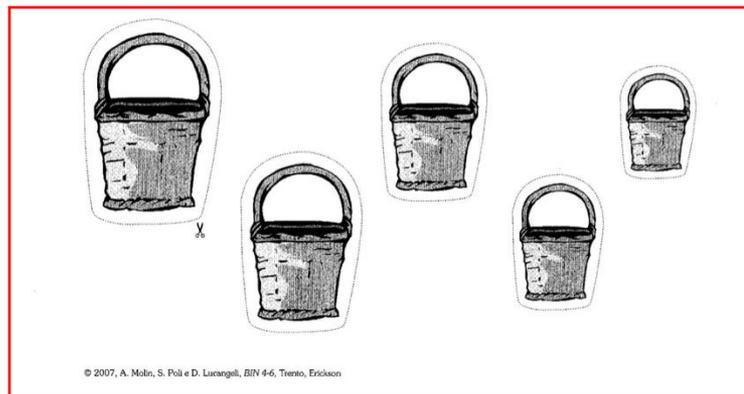
# Ordine di grandezza (a)

Ritagliare con precisione le diverse figure e consegnarle alla rinfusa al bambino che le dovrà ordinare secondo la consegna.

**Item A:** «Metti in ordine, dal più grande più piccolo, i cestini».

Ritagliare le palle, togliere la terza (per l'item B) e la quarta (per l'item C), presentare al bambino le rimanenti 4 in sequenza corretta, ed equidistanti l'una dall'altra (distanza tale da non consentire spostamenti nell'inserimento). Chiedere al bambino di inserire la palla, tolta a sua insaputa, dicendo:

Per l'item A, attribuire un punto per ogni cestino correttamente messo in sequenza.



# Ordine di grandezza (b)

**Item B:** «Metti al posto giusto la palla bianca e grigia».

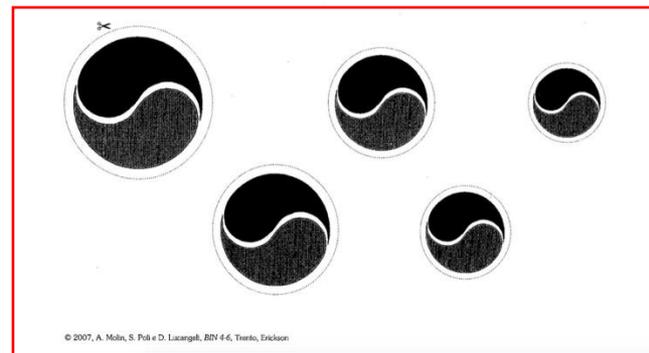
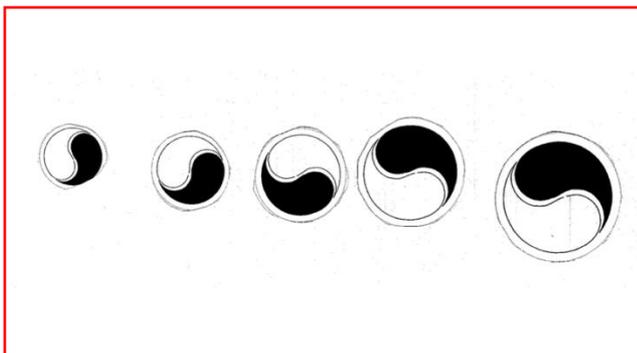
**Item C:** «Metti al posto giusto la palla nera e grigia».

Per l'item A, attribuire un punto per ogni cestino correttamente messo in sequenza.

Per gli item B e C, attribuire un punto per ciascun inserimento correttamente eseguito.



Punteggio \_\_\_\_ (massimo 7)



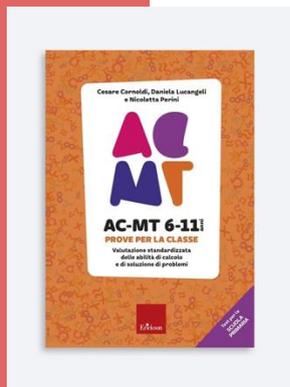


# Profilo

PROFILO INDIVIDUALE					
Nome _____	Fascia di prestazione*				
Età in mesi _____	_____				
	Punteggio	Criterio completamente raggiunto	Prestazione sufficiente	Richiesta di attenzione	Richiesta di intervento immediato
Corrispondenza nota-numero					
Letture di numeri scritti in codice arabo					
Scrittura di numeri					
<b>Totale Area lessicale</b>					
Confronto tra quantità					
Comparazione tra numeri arabi					
<b>Totale Area semantica</b>					
Enumerazione in avanti					
Enumerazione indietro					
Seriazione di numeri arabi					
Completamento di seriazioni					
<b>Totale Conteggio</b>					
Corrispondenza tra codice arabo e quantità					
Uno-tanti					
Ordine di grandezza					
<b>Totale Area pre-sintassi</b>					
Punteggio totale (Somma di tutte le prove)					
Valutazione qualitativa _____					
_____					

\* Fascie di prestazione: Età in mesi: 48-54; 55-60; 61-66; 67-72; 73-78

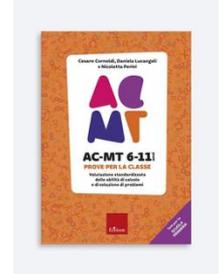
QUADRO DI SINTESI				
Alunno _____	Età _____			
Notazioni _____	_____			
	Data somministrazione _____			
	Criterio completamente raggiunto	Prestazione sufficiente	Richiesta di attenzione	Richiesta di intervento immediato
Punteggio totale				
Processi lessicali				
Processi semantici				
Conteggio				
Processi pre-sintattici				



AC-MT 6-11

# STRUTTURA ACMT 6-11

- Prove n. 9 + protocollo per la raccolta dati + profilo individuale
- Età 6-11 anni
- Modalità di somministrazione: individuale e collettiva
- Tempo di somministrazione: 20 minuti



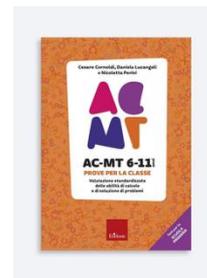
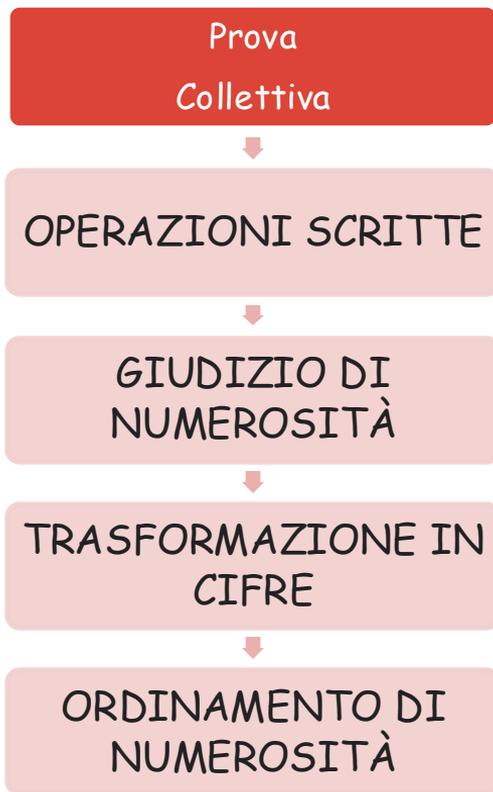
# STRUTTURA ACMT 6-11

## SCOPO:

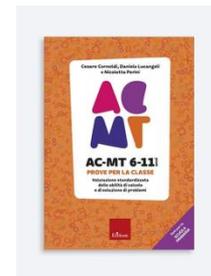
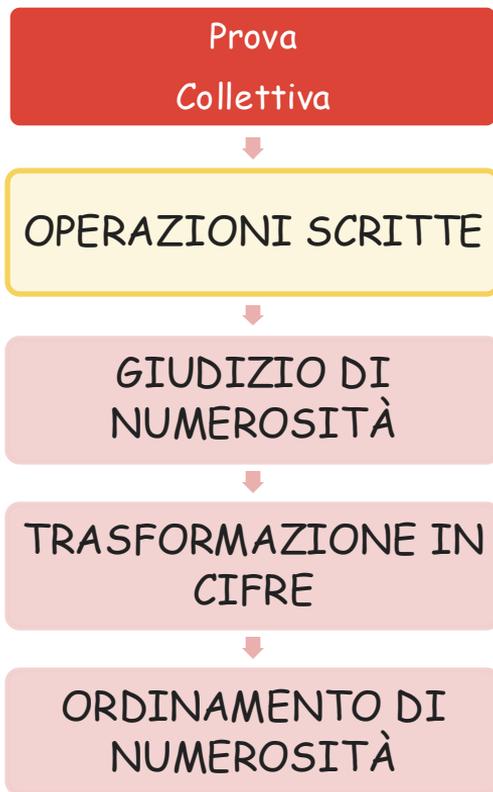
accertamento più generale  
delle abilità di calcolo dei  
bambini e accertamento del  
livello generale di quella classe

## DURATA:

25/30 minuti



# STRUTTURA ACMT 6-11



# ACMT 6-11 COLLETTIVA OPERAZIONI SCRITTE

Esegui le seguenti operazioni:

**CLASSE 4<sup>a</sup>**

$257 + 376$	$1431 - 126$

$2114 + 278$	$178 - 96$



Esegui le seguenti operazioni:

**CLASSE 4<sup>a</sup>**

$131 \times 37$	$875 : 5$

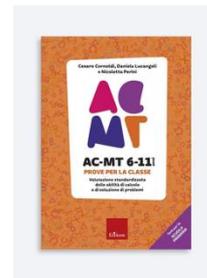
$157 \times 9$	$1740 : 4$



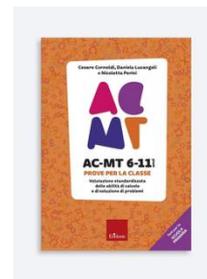
*Esamina le capacità di applicazione delle procedure di calcolo e gli automatismi coinvolti.*

*Punteggio:*

*1 punto per ogni operazione corretta*



# STRUTTURA ACMT 6-11



# ACMT 6-11 COLLETTIVA GIUDIZIO DI NUMEROSITÀ

Cerchia per ogni coppia il numero più grande:

CLASSE 4<sup>a</sup>

ESempio  856  428

183  138

192  119

2708  2770

1011  1101

507  570

3046  3409

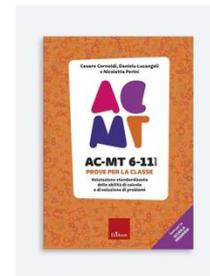
*È una prova di comprensione semantica che valuta anche il livello di conoscenza lessicale*

*Punteggio:*

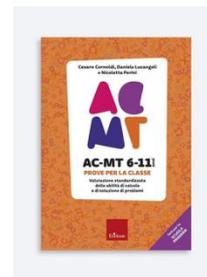
*1 punto per ogni risposta corretta*

Trasforma in cifre scritte:

ESempio



# STRUTTURA ACMT 6-11



# ACMT 6-11 COLLETTIVA TRASFORMAZIONE IN CIFRE

Cerchia per ogni coppia il numero più grande:

CLASSE 6^

Esempio	956	428
	183	138
	192	119
	2708	2770
	1011	1101
	507	570
	3046	3409

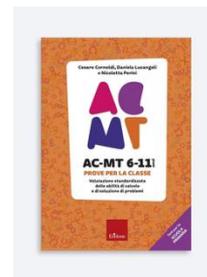
*Valuta la capacità di elaborare la struttura sintattica del numero che regola i rapporti tra le cifre che lo compongono.*

*Punteggio:*

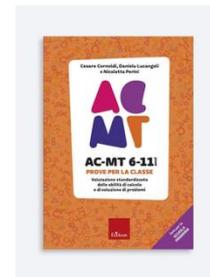
*1 punto per ogni risposta corretta*

Trasforma in cifre scritte:

Esempio	3 decine 8 unità 2 centinaia	238
	2 unità 4 centinaia 2 decine	
	3 decine 0 centinaia 1 unità 1 migliaio	
	3 decine 3 centesimi 4 unità 8 decimi	
	3 centinaia 4 unità 2 migliaia 0 decine	
	3 decimi 1 decina 7 unità 2 centinaia	
	0 unità 5 centinaia 0 decine	



# STRUTTURA ACMT 6-11



# ACMT 6-11 COLLETTIVA ORDINAMENTO DI NUMEROSITÀ

Metti in ordine questi numeri dal più piccolo al più grande:

CLASSE 4<sup>a</sup>

ESEMPIO

36 15 276 154 → 15 36 154 276

502 250 205 520 →

111 11 101 1011 →

2250 2000 2001 5520 →

145 504 1045 154 →

32,8 13,80 328 32,08 →



*Valuta la rappresentazione  
semantica dei numeri  
attraverso il confronto fra  
quantità  
ordinamento di serie:*

*← dal minore al maggiore  
dal maggiore al minore →*

*1 punto per ogni serie corretta*

Metti in ordine questi numeri dal più grande al più piccolo:

CLASSE 4<sup>a</sup>

ESEMPIO

79 663 115 12 → 663 115 79 12

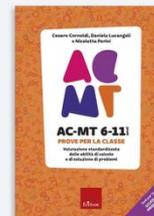
424 224 242 244 →

5005 5050 505 5500 →

809 1980 1809 1908 →

67 706 767 76 →

23,82 39,907 238,6 39,07 →





# ACMT 6-11 SCORING NORME



*4 fasce di prestazione:*

*OTT = Ottimale*

*SUFF = sufficiente*

*RA = richiesta di attenzione*

*RII = richiesta di intervento immediato*

*Norme suddivise per due distinti periodi dell'anno*

*Inizio anno: da ottobre a dicembre*

*Fine anno: da marzo a giugno*



# ACMT 6-11 SCORING

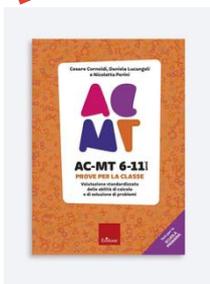
CLASSE QUARTA				
Operazioni scritte in classe	0-4	5-6	7	8
Giudizio di numerosità	0-5		6	
Trasformazione in cifre	0-2	3	4-5	6
Ordinamento di numerosità	0-6	7-8	9	10
Prova di soluzione di problemi aritmetici	0-1,5	2-3,5	4-7	7,5-9

Prove	N risposte corrette	Richiesta di intervento	Richiesta di attenzione	Nella media	Ottimale
Calcolo a mente tempo		$\geq 113$	92-112	26-91	$< 26$
Calcolo a mente errori		$> 1$		0-1	
Calcolo scritto tempo		$\geq 46$	38-45	12-37	$< 12$
Calcolo scritto errori		3-6		0	
Enumerazione tempo		$\geq 90$	70-89	45-69	$< 45$
Enumerazione errori		$\geq 2$		0-1	
Dettato		$\geq 1$		0	
Recupero fatti numerici		$\geq 8$	6-7	1-5	0

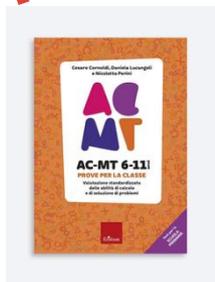
NEI CASI COMPLESSI



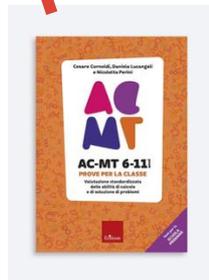
infanzia



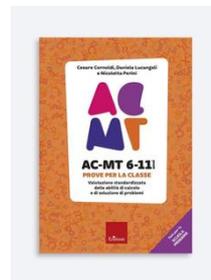
1° primaria



2° primaria



3° primaria



4° primaria



VALUTAZIONE  
QUALITATIVA

# ANALISI QUALITATIVA DELL'ERRORE

*Johnnie, seconda primaria, esegue in questo modo la sottrazione data:*

*L'insegnante lo corregge così:*

*“Dopo aver chiesto il prestito, hai dimenticato di sottrarre 1 da 4 nella colonna delle centinaia”.*

$$\begin{array}{r} 437 - \\ 284 = \\ \hline 253 \end{array}$$



# ANALISI QUALITATIVA DELL'ERRORE

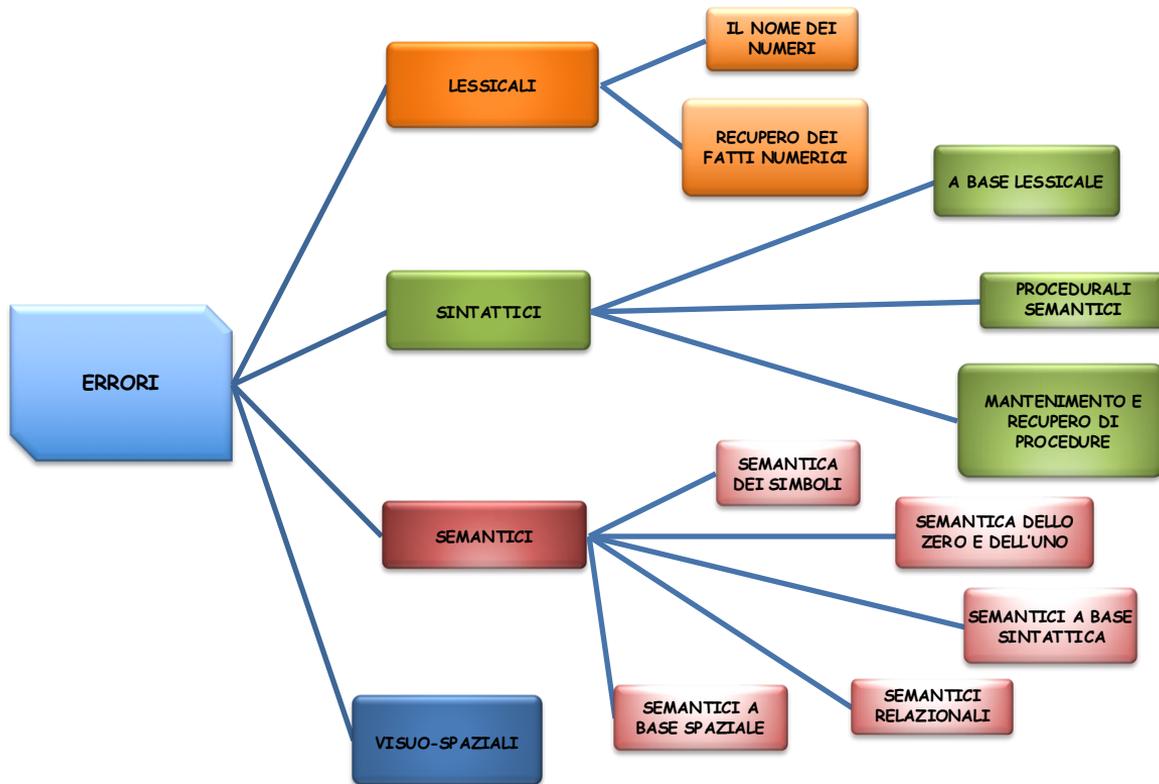
*Non potendo fare  $3 - 8$  Johnnie  
aveva deciso di fare  $8 - 3 = 5$*

*Interpretarne l'origine (VERIFICARE L'IPOTESI CON  
INTERVISTA A CALDO) Sviluppare percorsi adatti  
partendo dagli errori*

$$\begin{array}{r} 437 - \\ 284 = \\ \hline 253 \end{array}$$

The image shows a subtraction problem with a student's incorrect answer. The problem is  $437 - 284 =$ . The student's answer is  $253$ . Red arrows indicate the borrowing process: a downward arrow from the 4 to the 2, an upward arrow from the 3 to the 8, and a downward arrow from the 7 to the 4. A blue horizontal line is drawn under the student's answer, 253.

# UNA POSSIBILE CLASSIFICAZIONE DEGLI ERRORI



# ANALISI QUALITATIVA DELL'ERRORE

Durante il processo di apprendimento *l'errore è temporaneamente naturale*

Un *errore su un foglio è muto* è un effetto che può derivare da molte diverse cause

L'errore va sempre contestualizzato, non va mai visto da solo.

La "gravità" dell'errore è *in relazione al momento in cui appare nel processo di apprendimento*

INTERVENTO

Il **potenziamento** è l'insieme degli interventi volti a favorire e promuovere l'acquisizione e il normale sviluppo di una funzione non ancora comparsa al meglio, così da massimizzarne le potenzialità.

### *Zona di Sviluppo Prossimale*

Vygotskij (1974)

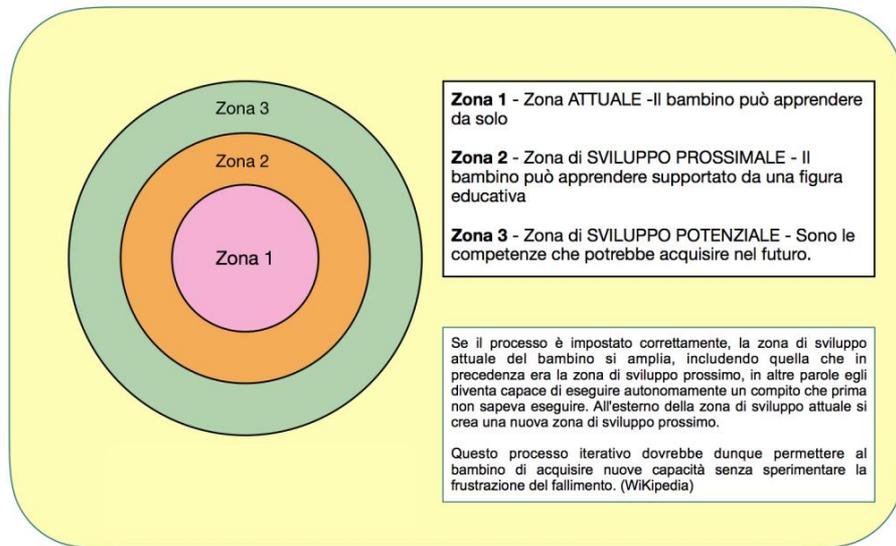


La differenza tra ciò che il b. sa fare da solo e ciò che è in grado di fare con l'aiuto ed il supporto di una persona più competente.

Livello attuale



Livello potenziale



POTENZIAMENTO

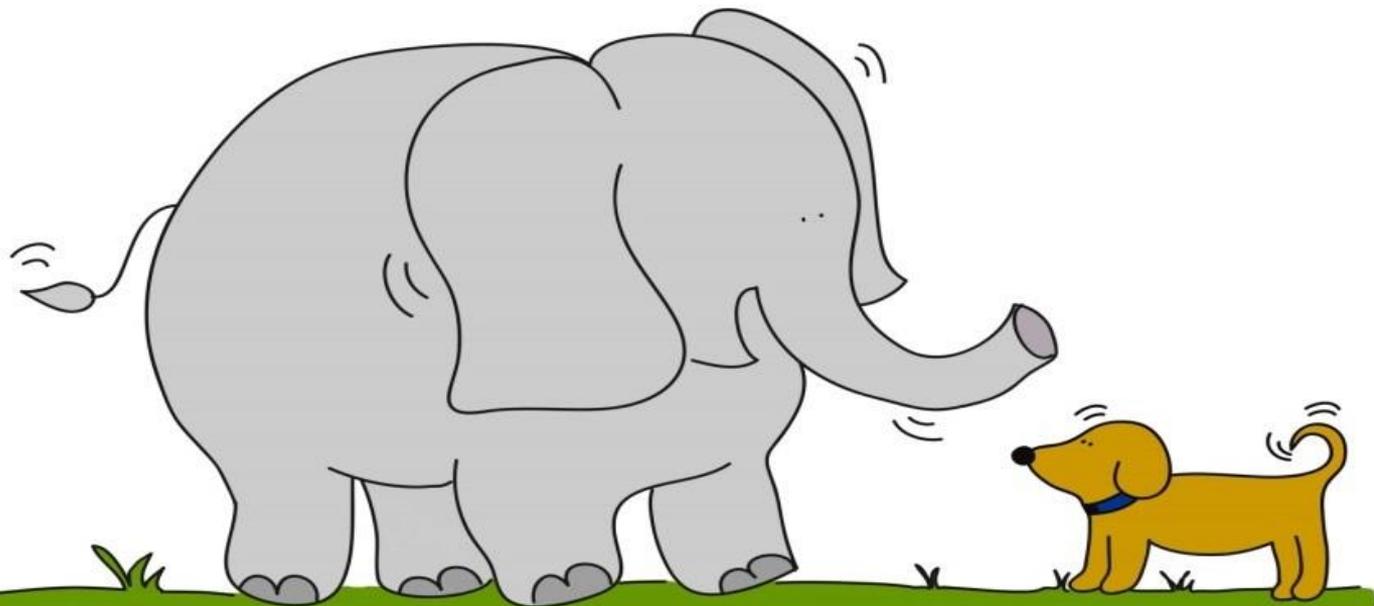


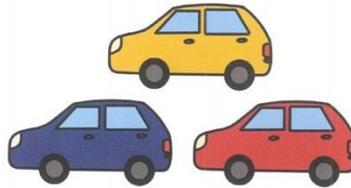
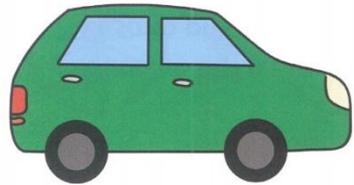
## Cosa possiamo fare?



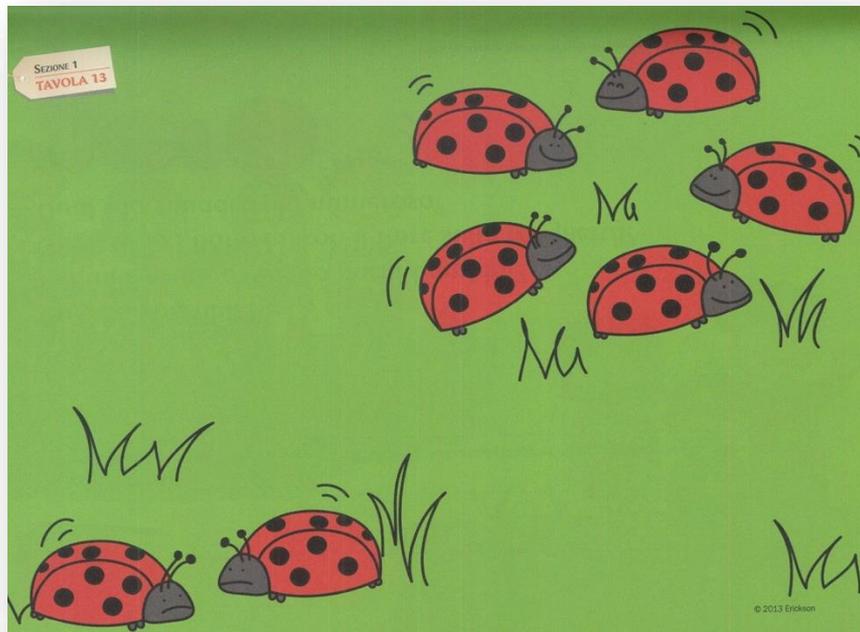
Prima dell'aspetto  
numerico...  
...cosa notano i bambini?

# Dimensioni di grandezza: grande-piccolo, alto- basso, lungo-corto...



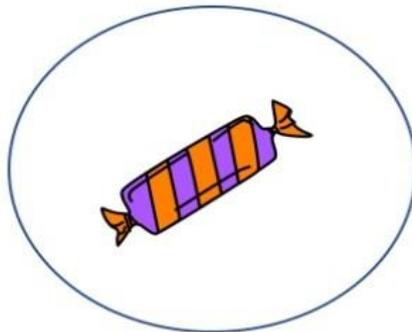
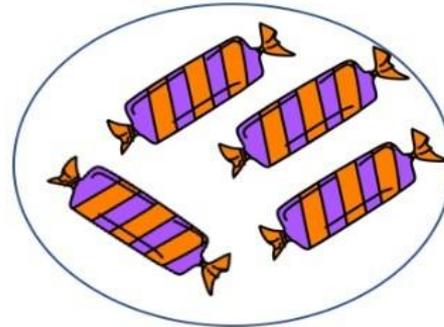
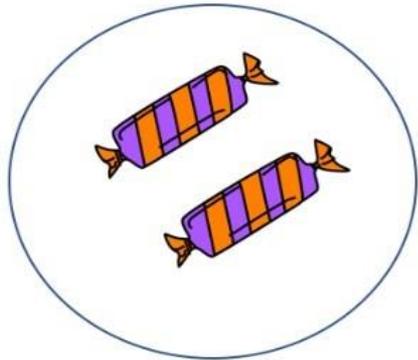


**Di più, di meno  
Oltre le variabili  
qualitative**

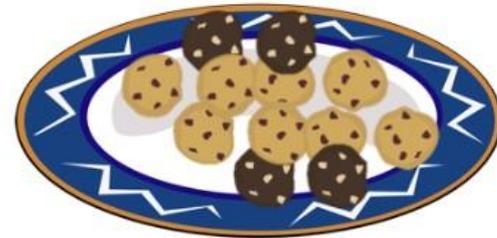
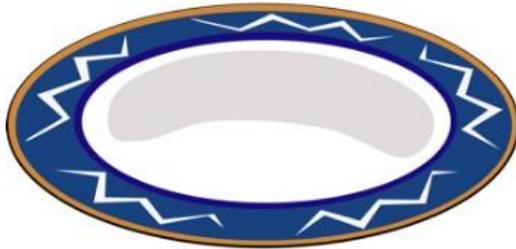


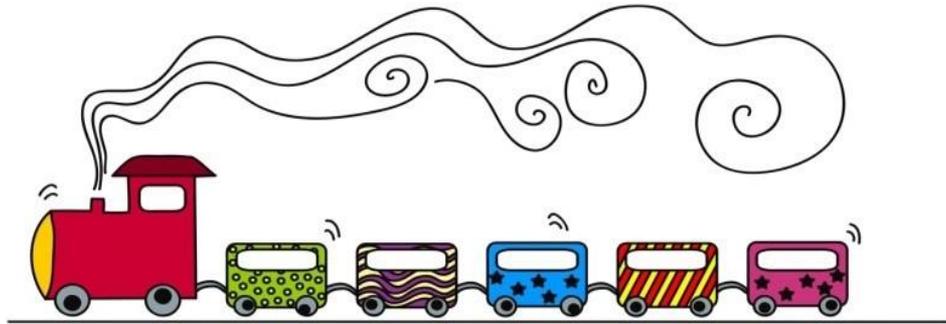
**Di più, di meno**

Dove ce ne sono di più?



Dove non ci sono biscotti?

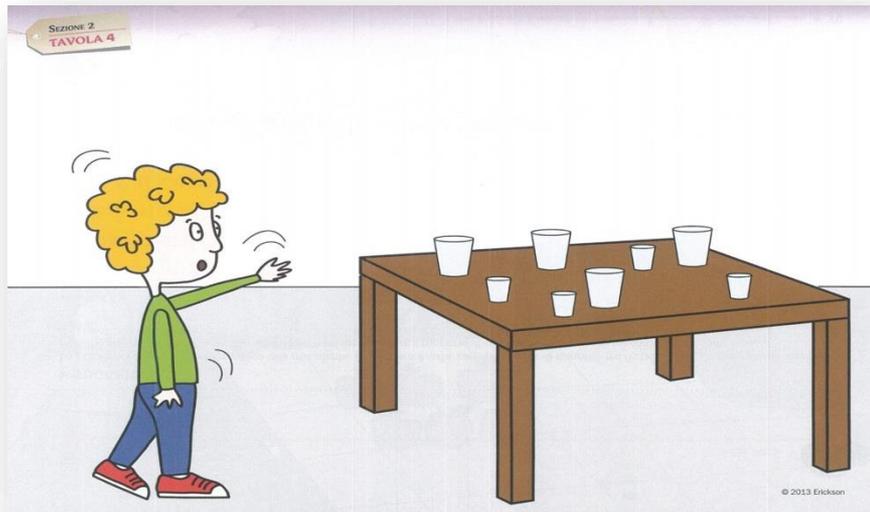




**Stimare le numerosità:  
più vagoncini → più lungo  
meno vagoncini → più  
corto...  
perché più corto?**

Chi ha mangiato di più?





## Focus sulla dimensione degli oggetti e sull'abbinamento piccolo-piccolo, grande-grande

Sul tavolo ci sono bicchieri per mamme e bicchieri per bambini.  
Quali sono i bicchieri dei bambini?  
Lui (indicando il bambino) quale bicchiere prenderà?  
E quale sarà il bicchiere della mamma?



Aiuta Paolo a preparare la tavola.  
Quanti bicchieri ci vogliono? E quanti cucchiaini?

**Contare e capire:  
rafforzare la  
corrispondenza tra  
quantità**

# COSA POSSIAMO FARE? CONTEGGIO

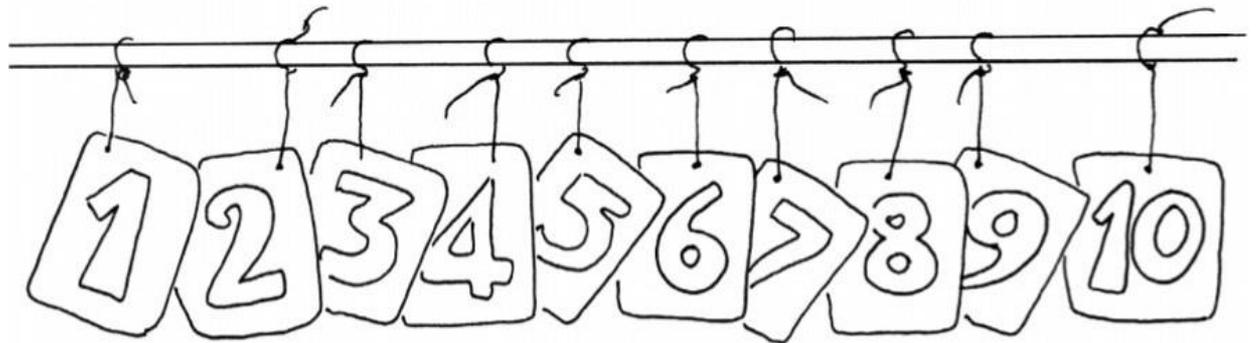
**4. CONTIAMO!** Quanti sono i fiorellini? 

ESEMPIO  e  2 e 3

 e 

 e 

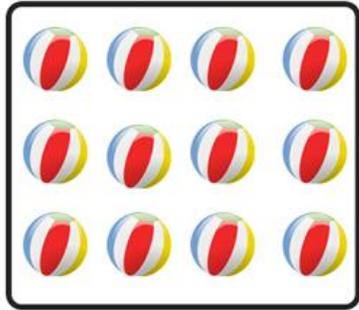
 **STAMPA**  **ANNULLA**  **NO FINITO**   1 / 10 



Ripassa con il colore rosso i numeri che trovi punteggiati.



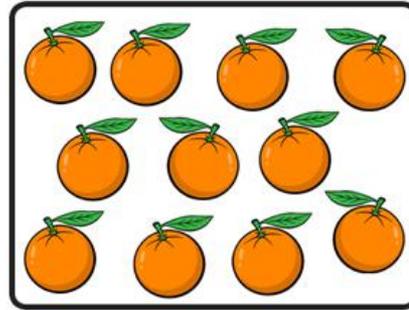
## Processi Lessicali



**12** Balls

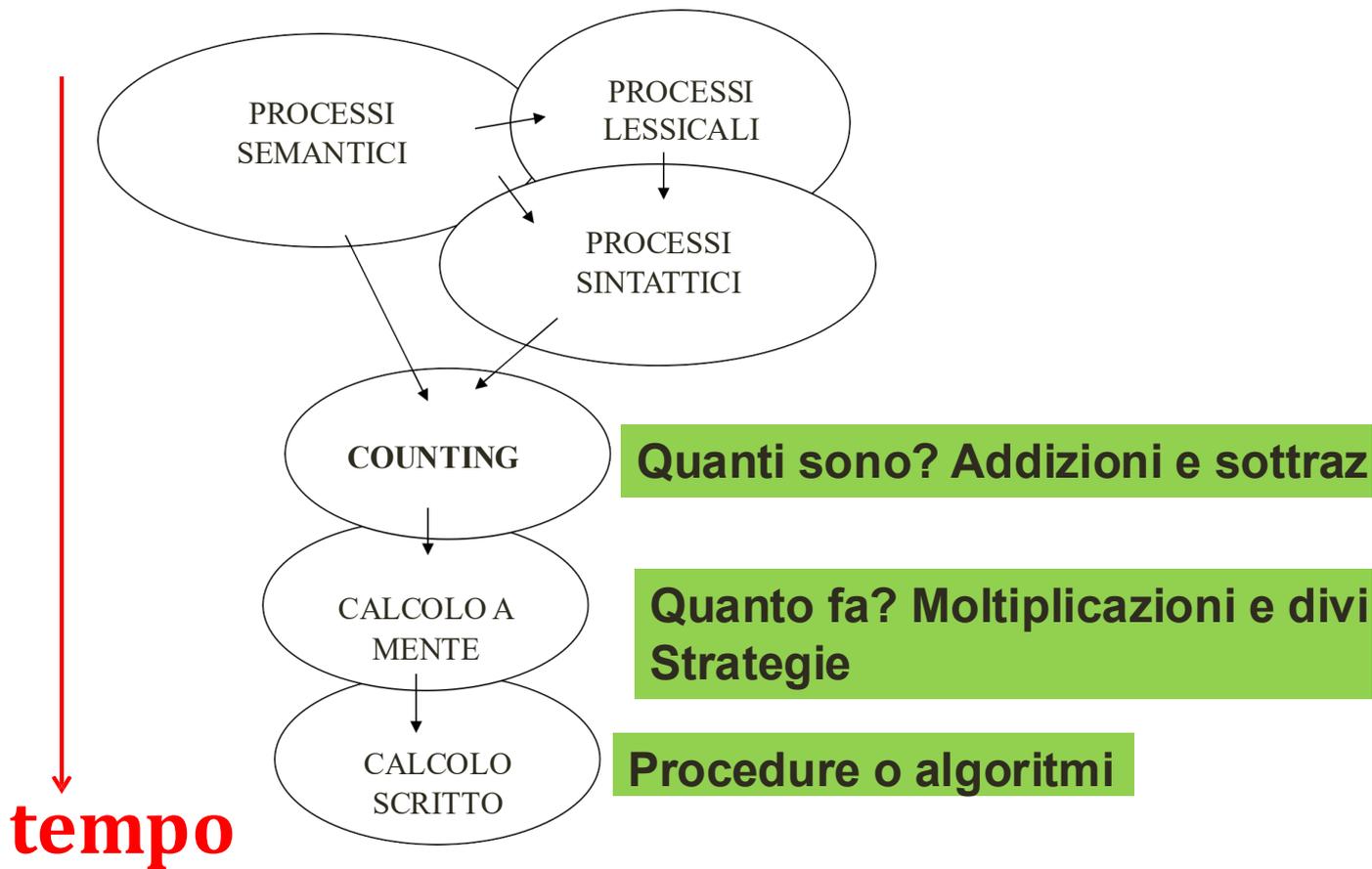


**5** Cups



**11** Oranges

# Conteggio





# Le difficoltà di calcolo

- Tre difficoltà fondamentali nella popolazione scolastica
  - **Difficoltà nella conoscenza numerica**
    - Comprendere e produrre aspetti lessicali, sintattici e semantici del numero
  - **Difficoltà nell'accuratezza del calcolo**
    - Correttezza di fatti aritmetici e procedure
  - **Difficoltà nell'automatizzazione del calcolo**
    - Velocità di esecuzione



# Strategie di calcolo a mente

- Sfruttando le **componenti ‘innate’** di elaborazione delle quantità: aspetti semantici
- Usando gli **aspetti visuospatiali**, il **conteggio** come mediatore cognitivo per l’addizione e la sottrazione
- Allenando la **manipolazione del numero**
- Sviluppando le **strategie** di calcolo

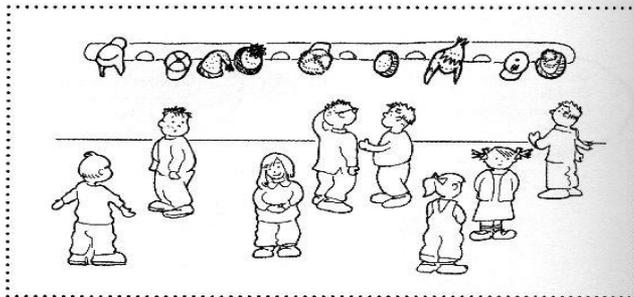
## Perché Contare è Calcolare:

### Principi del conteggio

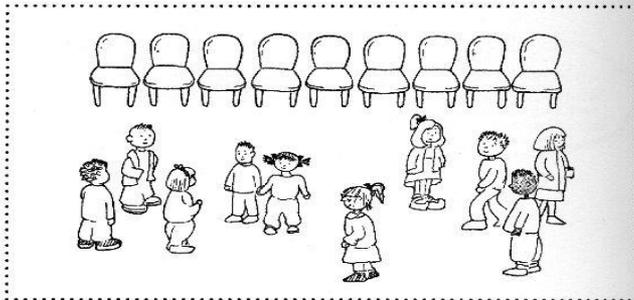
- Corrispondenza biunivoca
- Ordine stabile
- Cardinalità
  
- Irrilevanza dell'ordine  
di conta
- Astrazione



I bambini vanno a fare una passeggiata e ognuno di loro deve prendere il suo cappellino. Unisci, con una freccia, ciascun bambino a uno dei cappellini e controlla se ogni bambino ha il suo.



Ora i bambini sono ritornati dalla passeggiata e sono invitati a sedersi. Collega con una freccia ciascuna sedia a un bambino e controlla se tutti si possono sedere.

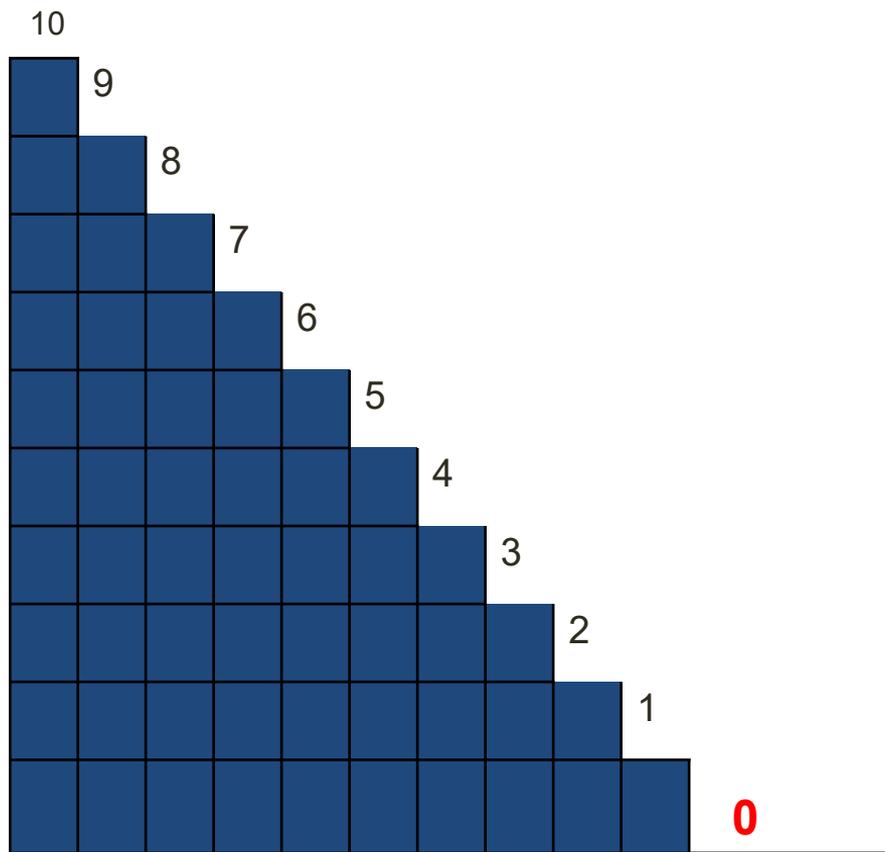


# Contare è calcolare: le prime strategie

- *contare tutto*: il bambino conta ciascun set, li unisce e riconta tutto di nuovo;
- *contare da*: il bambino si accorge che può continuare a contare da un addendo in poi, pronuncia a voce alta i risultati parziali, usa le dita per aiutarsi
- *contare dall'addendo maggiore*: è il principio della proprietà **commutativa** che il bambino impara spontaneamente, riflettendo sulle operazioni che compie e sui risultati che osserva (Carpenter e Moser, 1982).



# La scala per contare: analogia con la numerosità, incremento e .....





# Contare a salti (incremento – decremento continuo)

1...3...5...7... ..

4.....7.....10.....

9 ... 7 ... 5 ... ..

# Contare da .....

..... 8

.....

.....

.....



Ora imparerai a passare dal numero alla sua rappresentazione quantitativa. Guarda l'esempio!

7



Ora procedi da solo.

9

12

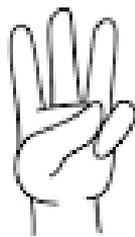
## L'uso delle dita



1



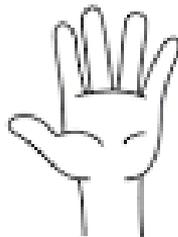
2



3



4



5



## Strategie del conteggio

Strategia:

contare dall'addendo maggiore, avvio al principio commutativo

Generalizzare

A	B
$7 + 2$	$2 + 6$
$6 + 3$	$3 + 5$
$8 + 2$	$2 + 4$
$6 + 2$	$4 + 8$
$9 + 3$	$2 + 7$
$5 + 3$	$3 + 6$
$4 + 2$	$4 + 8$
$12 + 3$	$4 + 9$
$15 + 2$	$2 + 9$
$11 + 4$	$4 + 7$

# Usare punti di riferimento: il 10

- strategie semplici di calcolo, oltre la decina (calcolo a salti)
- avviare alla automatizzazione

CF4 - Operazioni in verticale

Nell'eseguire i calcoli, a quale dei tre animaletti che vedi ti sembra di assomigliare? Confronta la tua velocità con quella degli animaletti.

$\begin{array}{r} 3+ \\ 2+ \\ 3+ \\ 2+ \\ 2+ \\ 1+ \\ 2+ \\ 5+ \\ 3+ \\ 2+ \\ \hline \end{array}$	La tartaruga è lenta a calcolare  	Il leprotto è un po' più veloce  	Speedy Gonzales è velocissimo  
Totale _____	Tempo 22"	Tempo 13"	Tempo 9"

$\begin{array}{r} 2+ \\ 2+ \\ 1+ \\ 4+ \\ 1+ \\ 2+ \\ 3+ \\ 2+ \\ 3+ \\ \hline \end{array}$	La tartaruga è lenta a calcolare  	Il leprotto è un po' più veloce  	Speedy Gonzales è velocissimo  
Totale _____	Tempo 17"	Tempo 11"	Tempo 7"

$\begin{array}{r} 5+ \\ 2+ \\ 3+ \\ 3+ \\ 2+ \\ 4+ \\ 1+ \\ 2+ \\ 3+ \\ \hline \end{array}$	La tartaruga è lenta a calcolare  	Il leprotto è un po' più veloce  	Speedy Gonzales è velocissimo  
Totale _____	Tempo 18"	Tempo 12"	Tempo 8"



Sara dice che ha vinto.

Dai un'occhiata ai risultati e, senza calcolare,  
rispondi: è vero?.....

	Gigi	Sara
1 gioco	3	2
2 gioco	2	6
3 gioco	1	5
4 gioco	2	4
5 gioco	3	6
	-----	-----
totale	_____	_____

# Composizione e scomposizione del numero



Quando i numeri da aggiungere contengono decine e unità, come si potrebbe fare? Prova a pensarci.

.....

Abbiamo conosciuto Andrea che, quando deve fare **12 + 16**, opera in questo modo:

$$16 + 10 + 2 = 28$$

Perché inizia dal **16**? .....

Perché ha scomposto il **12**? .....

Luca, invece, procede sommando tra loro le decine e poi le unità:

$$10 + 10 + 6 + 2 = 28$$



# Strategie di Arrotondamento

$$\bullet \quad 98 + 16 = \dots\dots\dots$$

$$2+$$

$$100 + 16 = 116 - 2 = \dots\dots\dots$$

$$\bullet \quad 132 - 29 = \dots\dots\dots$$

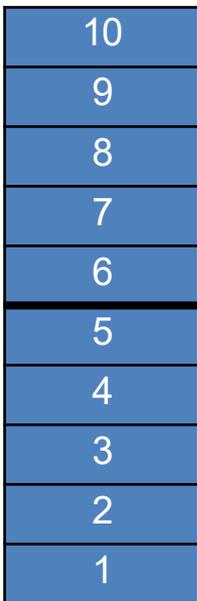
$$1+ \quad 1+$$

$$133 - 30 = \dots\dots\dots$$

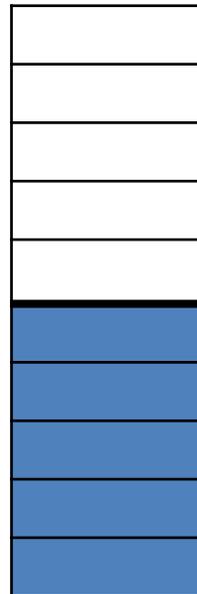


# Sottrarre - Calcolare in modo implicito: Strategia del completamento

Quanto manca?



.....



.....

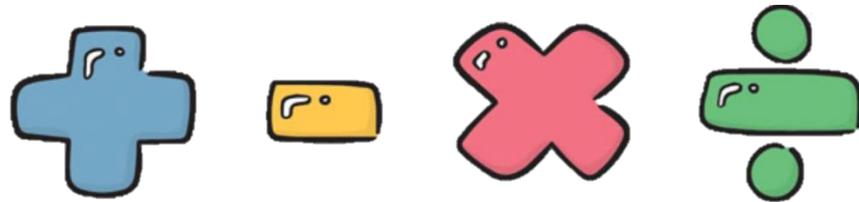
## I fatti: una definizione operativa

I fatti aritmetici possono essere definiti come i risultati di procedure aritmetiche già posseduti nella memoria (Cornoldi, 2005)

### Nei casi di difficoltà:

Una delle **prime difficoltà emergenti** –ben documentata – **è il recupero dei fatti numerici** (Geary, 2011, 2016...).

Butterworth (2005) considera il recupero dei fatti un tappa dello sviluppo della competenza aritmetica.



I fatti riguardano le 4 operazioni aritmetiche

- fatti additivi
- fatti sottrattivi
- fatti moltiplicativi
- fatti divisivi

Quali strategie di insegnamento nell'acquisizione dei «fatti»?



# Nodi problematici da tenere sotto controllo

- l'operazione della moltiplicazione
- la sua rappresentazione visuo- spaziale
- l'automatizzazione per il recupero dei fatti aritmetici



## Obiettivi apprendimento fatti:

### ■ **Accuratezza**

Risposte precise e non a caso

**Flessibilità:**  
capacità di usare i fatti

Es.  $7 \times 8 = 7 \times 7 + 7$   
e di applicarli a nuovi problemi

### ■ **Efficienza**

Tempo=  
automatizzazione

**Strategie:** es.

$$8 + 6 = 8 + 2 + 4$$

Trovare  
facilitazioni:  $x$   
10, 100, 1000

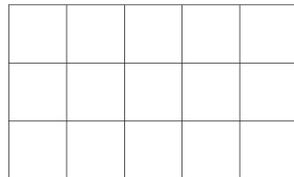


# Moltiplicare: Spazio e figure

► Colora la figura corrispondente a 2 tessere da 5 unità.



5 x 2 volte





# Si può moltiplicare?

## SI PUÒ MOLTIPLICARE?

Moltiplicazione

Scheda 17

► L'addizione si può trasformare in una moltiplicazione? Segui l'esempio e rispondi.

$$\begin{array}{l} 7 + \\ 7 + \\ 7 + \\ 7 + \\ 7 \end{array}$$

~~SI~~

NO

$$\begin{array}{l} 3 + \\ 2 + \\ 3 + \\ 2 + \\ 1 \end{array}$$

SI

NO

$$\begin{array}{l} 5 + \\ 5 + \\ 5 + \\ 5 + \\ 5 \end{array}$$

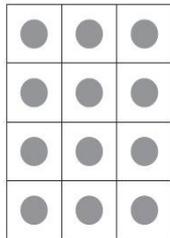
SI

NO



# Proprietà commutativa

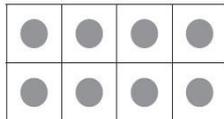
► Osserva con attenzione e completa. Segui l'esempio



3 pallini per 4 volte

*oppure*

4 pallini per 3 volte



   pallini per    volte

*oppure*

   pallini per    volte

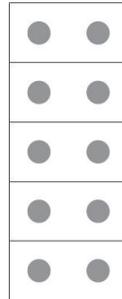


# DALLE ADDIZIONI ALLE MOLTIPLICAZIONI

Moltiplicazione

Scheda 15

Pallini



Numeri

2 +  
2 +  
2 +  
2 +  
2

Operazioni

2 x 5 volte

► Scrivi la moltiplicazione corrispondente.

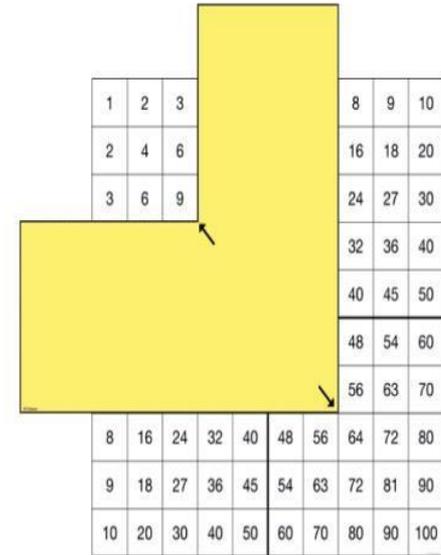
---

# Calcolo pitagorico

NOME <u>Mario</u>									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36				60
7	14	21	28	35		49			70
8	16	24	32	40			64		80
9	18	27	36	45				81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

IL CALCOLO PITAGORICO - Tavola pitagorica personale

Fig. 1.3 Esempio di tavola pitagorica personale.

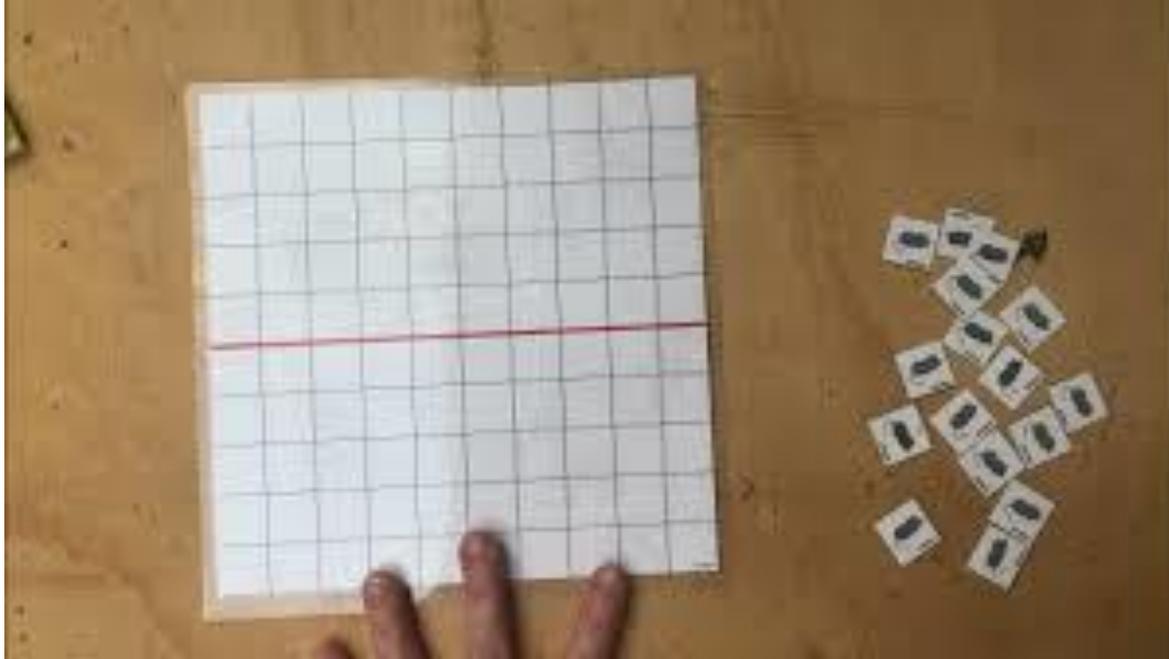


1	2	3						8	9	10
2	4	6						16	18	20
3	6	9						24	27	30
								32	36	40
								40	45	50
								48	54	60
								56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	

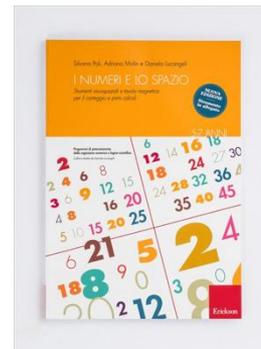
Fig. 1.4  
Il cartoncino a «L» così posizionato indica, attraverso le frecce, i risultati di  $3 \times 3$  e  $8 \times 8$ .

STRUMENTO 5: Quadrati

# Contatab

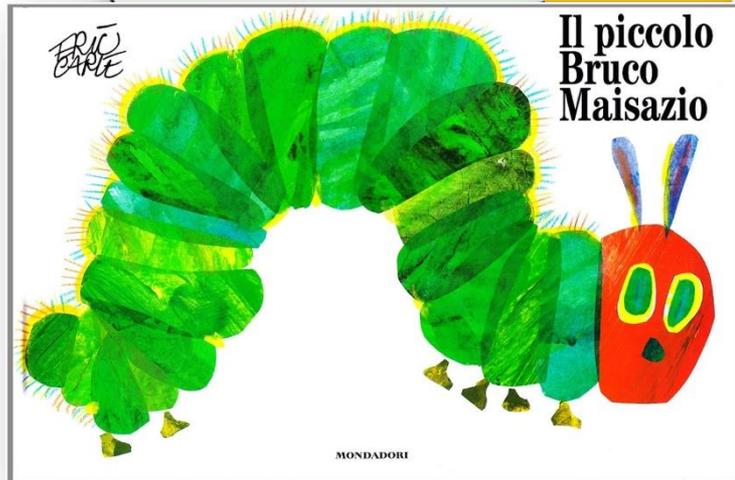


# QUALI STRUMENTI PER IL POTENZIAMENTO ABBIAMO?





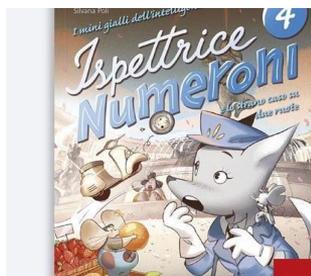
MINI MATH - APP



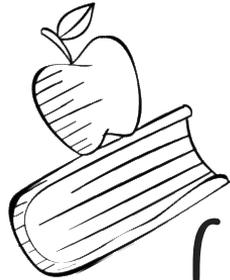
Math Minis  
- Addition and Subtraction



# L'ISPETTRICE NUMERONI







GRAZIE

BUON LAVORO

# BIBLIOGRAFIA

---

- ✓ B.D'Amore, I. Marazzani, S. Sbaragli (2008), *La didattica della matematica e le sue difficoltà*, Erickson
- ✓ Rosetta Zan (2007), *Difficoltà in matematica*, Springer
- ✓ R. Zan, Baccaglioni - Frank (2017), *Avere successo in matematica*, Utet
- ✓ Lucangeli, Mammarella (2010), *Psicologia della cognizione numerica*, FrancoAngeli
- ✓ Genovese, Ghidoni, Guaraldi (2013), *Discalculia nei giovani adulti*, Erickson
- ✓ D'Amore, M.I.Fandino Pinilla (2009), *Zero, aspetti concettuali e didattici*, Erickson
- ✓ Butterworth e Yeo (2011), *Didattica per la discalculia*, Erickson
- ✓ C. Cornoldi - C. Cazzola, *Test AC-MT 6-11 - Test di valutazione delle abilità di calcolo e problem solving*, Erickson, Trento 200
- ✓ D. Lucangeli, S. Poli, A. Molin, C. De Candia, C. Bertolli, *L'intelligenza numerica*, Erickson
  - ✓ Vol.1: 3-6 anni
  - ✓ Vol.1: 6-8 anni
  - ✓ Vol.1: 8-11 anni
  - ✓ Vol.1: 11-14 anni